

# Les systèmes dynamiques combinatoires

par

Dominic DESJARDINS CÔTÉ

mémoire présenté au Département de mathématiques  
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTE DES SCIENCES  
UNIVERSITE DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Quebec, Canada, février 2020

Le 3 février 2020

le jury a accepté le mémoire de Monsieur Dominic Desjardins Côté  
dans sa version finale.

Membres du jury

Professeur Tomasz Kaczynski  
Directeur de recherche  
Département de mathématiques

Professeur Madjid Allili  
Évaluateur interne  
Département de mathématiques

Professeur Jean-Pierre Dussault  
Président-rapporteur  
Département d'informatique

# SOMMAIRE

Nous construisons un système dynamique combinatoire où l'espace et le temps sont discrets. À l'aide de la théorie de Morse discrète de Robin Forman, nous généralisons le champ vectoriel combinatoire pour obtenir un système dynamique combinatoire. Nous utilisons les complexes simpliciaux comme espaces combinatoires. Nous apparions un simplexe de dimension  $n$  avec un simplexe de dimension  $n + 1$  pour construire un champ vectoriel combinatoire sur cet espace. Ensuite, pour décrire la dynamique du système, nous construisons une application multivoque  $\Pi_V$ . Nous nous intéressons à une étude qualitative du système. Donc, nous cherchons les ensembles invariants isolés et les liens entre eux pour obtenir la décomposition de Morse. En outre, nous approfondissons la structure des cycles qui nous permettent de construire une méthode générale pour construire la décomposition de Morse d'un système dynamique combinatoire. De plus, nous développons des algorithmes pour vérifier les définitions, les calculs d'invariants et la construction d'une décomposition de Morse.

**Mots-clés** : système dynamique combinatoire, complexe simplicial, théorie de Morse discrète, décomposition de Morse, champ vectoriel discret.

# REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon superviseur de recherche Tomasz Kaczynski qui m'a encouragé à développer mes aptitudes en recherche et à me dépasser. Ensuite, je tiens aussi à remercier les membres et les anciens membres du groupe de recherche (GRTCI) : Madjid Allili, Reza Ghamarshoustari, David Bernier, Chaima Hamdi, Xin Wang et Guillaume Brouillette. Ils m'ont permis de partager des connaissances et de peaufiner mes talents de présentateur. De plus, je tiens aussi à remercier mes parents Christine et Yves et mes frères Dany et Rémi de m'avoir appuyé tout le long de mon parcours scolaire et d'avoir cru à mes compétences. Pour finir, je tiens aussi à remercier mes amis Ambre, Denis et Maxime pour leur appui moral et les discussions partagées qui ont contribué à mon développement personnel. En particulier, à Maxime, pour ses commentaires et ses suggestions lors de la rédaction de ce mémoire.

Dominic Desjardins Côté  
Sherbrooke, novembre 2019

# TABLE DES MATIÈRES

<b>SOMMAIRE</b>	<b>iii</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>iv</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>v</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	<b>viii</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b>	<b>ix</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 — Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Les systèmes dynamiques classiques . . . . .	3
1.2 La théorie des graphes . . . . .	7
1.2.1 Les Graphes . . . . .	7
1.2.2 Des structures de données . . . . .	12

1.2.3	Algorithmes . . . . .	14
<b>CHAPITRE 2 — Un espace combinatoire</b>		<b>19</b>
2.1	Les complexes simpliciaux . . . . .	19
2.2	Implémentation . . . . .	25
2.2.1	Diagramme de Hasse . . . . .	25
2.2.2	L'arbre simplicial . . . . .	28
2.3	Du nuage de points au complexe simplicial . . . . .	35
<b>CHAPITRE 3 — La théorie de Morse discrète</b>		<b>42</b>
3.1	Les champs vectoriels combinatoires gradients et les fonctions de Morse discrètes . . . . .	43
3.2	Des données au fonction de Morse discrète . . . . .	51
<b>CHAPITRE 4 — Les champs vectoriels combinatoires avec une application multivoque</b>		<b>58</b>
4.1	Les systèmes dynamiques combinatoires . . . . .	59
4.2	Les invariants . . . . .	66
<b>CHAPITRE 5 — L'étude des cycles et la décomposition de Morse</b>		<b>80</b>
5.1	Les cycles . . . . .	80
5.2	La décompostion de Morse . . . . .	91
<b>CONCLUSION</b>		<b>100</b>



# LISTE DES TABLEAUX

1.1	Comparaison de la liste d'adjacence et de la matrice d'adjacence . . . .	14
2.1	Comparaison en terme d'opérations du diagramme de Hasse et de l'arbre simplicial . . . . .	34



# LISTE DES FIGURES

1.1	Exemples des portraits de phase des systèmes dynamiques avec des trajectoires en bleu. . . . .	5
1.2	Exemple de graphe non orienté . . . . .	8
1.3	Exemple de graphe orienté . . . . .	8
1.4	Exemple plus complexe de graphe orienté . . . . .	9
1.5	Exemple de composantes fortement et faiblement connexes . . . . .	10
1.6	Exemple d'un arbre avec 0 comme racine . . . . .	11
1.7	Exemple d'un arbre avec les différents types d'arêtes . . . . .	12
1.8	Exemple de graphe pour la matrice d'adjacence et la liste d'adjacence . .	13
1.9	Exemple de calcul de la fermeture transitive d'un graphe . . . . .	16
2.1	$V_0, V_1$ et $V_2$ forment un 2-simplexe. . . . .	21
2.2	Exemples et contre-exemples de complexes simpliciaux . . . . .	24
2.3	Diagramme de Hasse de l'exemple 2.15. . . . .	26
2.4	Un complexe simplicial avec son diagramme de Hasse. . . . .	27

2.5	Un complexe simplicial (a) et son arbre simplicial (b). . . . .	30
2.6	Un exemple d'un nerf de recouvrement (a) et son complexe simplicial (b). . . . .	35
2.7	Exemple d'un nerf de recouvrement qui ne forme pas un complexe simplicial géométriquement réalisable dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	37
2.8	Exemple du nerf de recouvrement (a). En (b), nous avons son complexe de Čech et en (c) le complexe de Rips. . . . .	39
2.9	Exemple d'un diagramme de Voronoï avec 5 points. . . . .	39
2.10	Exemple du nerf de recouvrement(a). En (b) nous avons le complexe de Delaunay(b) et en (c) nous avons le complexe Alpha. . . . .	41
3.1	Les fonctions de Morse discrètes sur un ensemble de 0-simplexes et 1-simplexes. . . . .	44
3.2	Exemple des simplexes critiques notés en rouge. . . . .	45
3.3	Dessin de vecteur par la règle $f(\alpha) \geq f(\beta)$ . Alors, $\alpha \rightarrow \beta$ . . . . .	46
3.4	Exemples . . . . .	47
3.5	Construction du diagramme de Hasse. . . . .	49
3.6	Construction du diagramme de Hasse modifié. . . . .	49
3.7	Exemple sur un tore de l'algorithme 2 . . . . .	57
4.1	Exemple d'un système combinatoire dynamique . . . . .	60
4.2	Contre-exemples sur les systèmes dynamiques de la définition 4.1 . . . . .	61
4.3	Exemple d'un graphe orienté du système combinatoire dynamique 4.1. . . . .	62

4.4	Exemple sur les invariants minimaux. . . . .	78
5.1	Exemple sur des cycles. . . . .	81
5.2	Exemple d'un cycle de longueur 6. . . . .	87
5.3	Exemple d'une auto-intersection dans les cycles. . . . .	88
5.4	Exemple des ensembles $\alpha$ -limites et $\omega$ -limites. . . . .	92
5.5	Exemple d'une décomposition de Morse d'un système dynamique combi- natoire avec son graphe de Morse. . . . .	94
5.6	Exemple d'une décomposition de Morse par les composantes fortement connexes avec son graphe de Morse. . . . .	98

# INTRODUCTION

Depuis la dernière décennie, le concept de champ vectoriel combinatoire, introduit par Robin Forman en 1998 [For02], est devenu un outil très efficace pour la discrétisation des problèmes continus en mathématiques, en imagerie et pour le calcul d'homologie. Dans ce travail, nous l'appliquons aux systèmes dynamiques. D'abord, nous avons besoin de quelques notions préliminaires sur la théorie des graphes et sur les systèmes dynamiques classiques. Ensuite, nous définissons les complexes simpliciaux [Mun84] qui permettent de construire l'espace combinatoire. De plus, à partir d'un ensemble de points, nous construisons des complexes simpliciaux avec plusieurs méthodes différentes comme le complexe de Čech, le complexe de Vietoris-Rips et le complexe Alpha [EH10, Ghr14]. Par la suite, nous introduisons une première approche des champs vectoriels combinatoires gradients développés par Robin Forman [For02, For98]. Dans ces travaux, l'auteur les utilise pour donner une analogie discrète de la théorie de Morse. De plus, nous montrons un algorithme qui construit un champ vectoriel gradient à partir d'un complexe simplicial avec une fonction donnant une valeur réelle à chaque sommet [RJWS10]. Ensuite, nous reprenons la même idée des champs vectoriels combinatoires et nous la généralisons pour le cas des systèmes dynamiques pour en obtenir leur discrétisation [KMW16]. Nous aurons besoin d'une application multivoque qui nous permettra d'étudier les systèmes dynamiques combinatoires. Alors, nous définissons les solutions et analysons les zones de convergence ou divergence de ces solutions. Nous ajoutons quelques conditions supplémentaires à ces

zones pour obtenir les invariants isolés et les invariants minimums. Ensuite, nous définissons les cycles dans un système dynamique combinatoire et nous approfondissons leur structure. Pour finir, nous décomposons un système dynamique combinatoire en une décomposition de Morse [BKMW]. Pour ce faire, nous utilisons un ensemble partiellement ordonné qui est composé d'ensembles invariants isolés et les relations entre eux définies par les solutions entrantes et sortantes. Avec ces données, nous créons un graphe de Morse qui encode l'information sur les zones importantes et les liens entre elles. Ainsi, cette décomposition de Morse permet une étude qualitative du système. Ainsi, ce mémoire présente une approche aux systèmes dynamiques combinatoires qui est la généralisation de la construction des champs vectoriels discrets de la théorie de Morse discrète sur les complexes simpliciaux et une méthode systématique pour les analyser. De plus, nous développons des algorithmes afin de vérifier des définitions, construire des invariants et la décomposition de Morse. Les algorithmes de ce mémoire sont codés et utilisés pour la production des exemples et des figures.

Donc, la suite de ce mémoire est organisée comme suit : le chapitre 1 fait un rappel sur les systèmes dynamiques classiques et de la théorie des graphes. Le chapitre 2 introduit les complexes simpliciaux. Le chapitre 3 est consacré sur la théorie de Morse discrète. Ensuite, dans le chapitre 4, nous développons sur les systèmes dynamiques combinatoires. Pour finir, dans le chapitre 5, nous étudions les cycles et la décomposition de Morse. Mes contributions originales se situent dans les chapitres 4 et 5.

# CHAPITRE 1

## Préliminaires

### 1.1 Les systèmes dynamiques classiques

Tout d'abord, qu'est-ce qu'un système dynamique ? Nous cherchons les solutions  $x(t, x_0)$  du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $t$  est le temps et  $x_0$  est la valeur initiale. Donc, nous nous intéressons à connaître l'évolution d'une valeur de  $x$  dans le temps  $t$ . Par exemple, cette valeur pourrait être la position d'un objet ou même des conditions météorologiques. Ainsi, nous définissons  $\varphi(t, x) : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  et nous simplifions l'équation (1.1) pour obtenir :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi) \\ \varphi(0, x) = x. \end{cases} \quad (1.2)$$

**Définition 1.1.** Soient  $X$  un espace métrique et  $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  une fonction continue. Alors,  $\varphi$  est un flot, ou un système dynamique à temps continu, si les propriétés suivantes

sont satisfaites :

1.  $\varphi(0, x) = \text{Id}_x$  ;
2.  $\varphi(s + t, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ , pour tout  $t$  et  $s \in \mathbb{R}$ .

La première condition indique qu'au temps initial, la valeur initiale est  $x_0$ . Pour la deuxième, si nous additionnons les temps  $s$  et  $t$  au point  $x$ , ceci revient à la composition du flot au temps  $s$  avec  $x$  et ensuite avec le temps  $t$  obtenu du nouveau point. Nous avons quelques exemples de systèmes dynamiques dans la Figure 1.1.

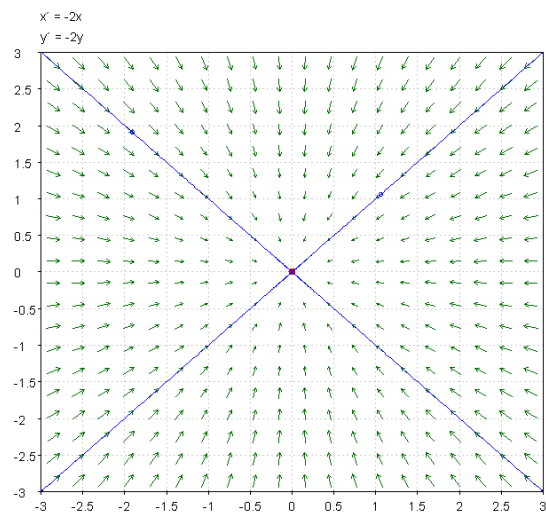
Ainsi, nous posons la question suivante : que pouvons-nous étudier sur un système dynamique ? D'abord, nous pouvons nous intéresser aux futurs du système dynamique, c'est-à-dire quand  $t \rightarrow \infty$  ou même aux passés du système quand  $t \rightarrow -\infty$ . De plus, nous pouvons chercher les points d'attraction, les points répulsifs et vérifier s'il contient des cycles. Donc, nous nous intéressons au comportement des trajectoires que nous définissons comme suit.

**Définition 1.2.** Soient un flot  $\varphi$  et un point  $x_0 \in X$ . Une trajectoire est  $t \rightarrow \varphi_t(x_0)$  de  $x_0$  et son image est  $\varphi_{\mathbb{R}}(x_0) = \{\varphi_t(x_0)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset X$  aussi appelée une orbite.

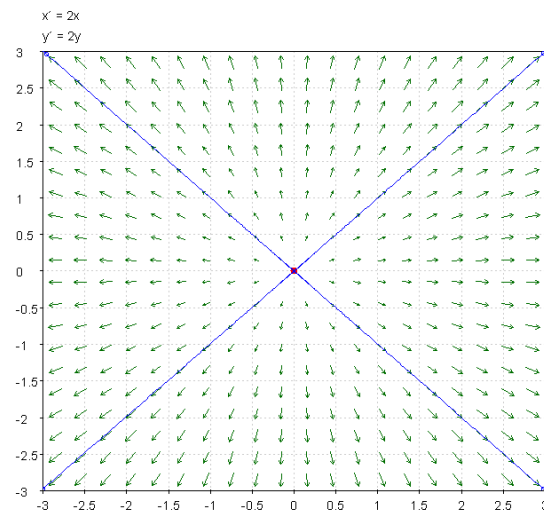
De plus, s'il y existe une trajectoire de  $\varphi$  de  $x$  telle que son orbite  $\varphi_{\mathbb{R}}(x) = x$ , alors, le point  $x$  est un point d'équilibre aussi appelé un point fixe. Une trajectoire  $t \rightarrow \varphi_t(x)$  est un cycle, s'il existe  $T > 0$  tel que  $\varphi_{T+t}(x) = \varphi_t(x)$  pour tout  $t$ .

Donc, si nous avons une trajectoire quelconque d'un système dynamique, il est difficile de trouver la solution associée à cette trajectoire de l'équation (1.1). En revanche, il serait plus simple d'analyser le futur et le passé des trajectoires. À la Figure 1.1, nous avons quelques exemples de trajectoires qui sont représentées en bleu.

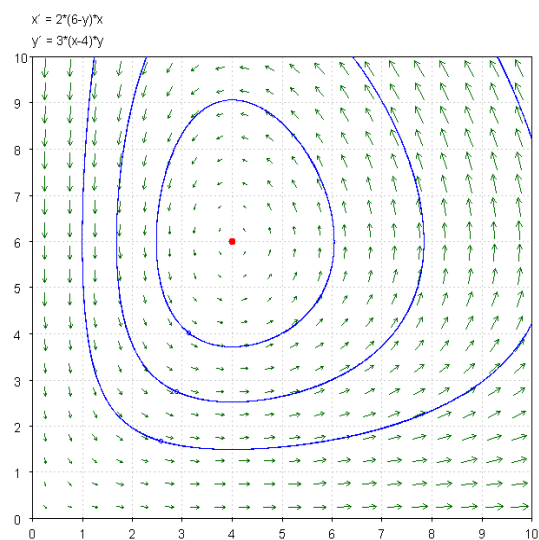
**Définition 1.3.** Soit  $\varphi$  un flot. Nous définissons les ensembles  $\omega$ -limites et  $\alpha$ -limites



(a)



(b)



(c)

Figure 1.1 – Exemples des portraits de phase des systèmes dynamiques avec des trajectoires en bleu.



d'un point  $x$  comme suit :

$$\omega(x) = \bigcap_{t \in [0, \infty)} \overline{\varphi_{[t, \infty)}(x)},$$

$$\alpha(x) = \bigcap_{t \in (-\infty, 0]} \overline{\varphi_{(-\infty, t]}(x)}.$$

**Exemple 1.4.** Calculons les ensembles  $\alpha$ -limites et  $\omega$ -limites des points sur les trajectoires des systèmes dynamiques de la Figure 1.1. Pour 1.1(a), soit  $x_1$  un point sur une des trajectoires en bleu. Alors  $\alpha(x_1) = \emptyset$  et  $\omega(x_1) = (0, 0)$ . Pour 1.1(b), soit  $x_2$  un point sur une des trajectoires en bleu. Alors  $\alpha(x_2) = (0, 0)$  et  $\omega(x_2) = \emptyset$ . Pour 1.1(c), soit un point  $x_3$  sur une des trajectoires en bleu et  $\varphi_t(x_3)$  sa trajectoire associée. Alors  $\alpha(x_3) = \varphi_t(x_3) = \omega(x_3)$ .

L'ensemble  $\alpha$ -limite représente la source de la trajectoire par exemple des points répulsifs. Pour l'ensemble  $\omega$ -limite, ceci représente la destination de la trajectoire par exemple des points attractifs. Par contre, analyser toutes les trajectoires possibles contient trop d'information redondante. Alors, ils sont regroupés dans des zones qui contiennent un comportement intéressant, comme, les cycles, les points attractifs et les points répulsifs.

**Définition 1.5.** Soient  $\varphi$  un flot et un intervalle  $(t_-(x), t_+(x))$  où  $t_-(x) < 0$  et  $t_+(x) > 0$ . Un ensemble  $K \subset X$  est un invariant si  $\varphi_t(x) \in K$  pour tout  $x \in K$  et pour tout  $t \in (t_-(x), t_+(x))$ . Si c'est seulement pour les  $t \in [0, t_+(x))$ , alors,  $K$  est un invariant positif. Si c'est seulement pour les  $t \in (t_-(x), 0]$ , alors,  $K$  est un invariant négatif.

**Exemple 1.6.** Retournons à la Figure 1.1 et trouvons des invariants. Pour 1.1(a), soit  $K_1 = [-1, 1] \times [-1, 1]$  avec une trajectoire quelconque.  $K_1$  est un invariant positif, mais il n'est pas un invariant négatif. Pour 1.1(b) avec le même  $K_1$  et une trajectoire quelconque, nous obtenons le contraire.  $K_1$  est un invariant négatif, mais il n'est pas un invariant positif. Pour 1.1(c), soit  $K_2$  l'intérieur de la trajectoire bleue formant le plus petit cycle, alors  $K_2$  forme un invariant.

Donc, nous décomposons le système dynamique en plusieurs zones contenant un comportement intéressant comme un point attractif, un point répulsif ou un cycle. Ainsi, ceci nous permet d'étudier le système pour comprendre les tendances du système et de pouvoir faire des prédictions en sachant des valeurs initiales.

Dans un autre ordre d'idée, nous pouvons aussi discrétiser le temps du système dynamique. Ainsi, le flot devient  $\varphi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ , que nous appelons un système dynamique à temps discret. De plus, si  $f : X \rightarrow X$  est donnée par  $f(x) = \varphi_1(x)$ . Alors, nous obtenons  $\underbrace{f(x) \circ f(x) \circ \dots \circ f(x)}_{n \text{ compositions}} = \varphi_1 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_1 = \varphi_n(x)$  pour les temps  $t = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Dans le cas où  $t$  est négatif, il y a quelques solutions possibles. Une solution est de supposer que la fonction  $f$  est inversible. De la même façon, nous pouvons appliquer  $f^{-1}$   $n$  fois pour obtenir les temps négatifs  $t \in \mathbb{Z}_{< 0}$ .

Donc, nous remarquons qu'il est simple de discrétiser le temps. Si nous avons la fonction  $f$  qui définit une unité de temps, alors, nous appliquons la fonction  $t$  fois pour obtenir le temps  $t$  pour une valeur  $x$ . En revanche, il est plus difficile de discrétiser l'espace euclidien  $X$  car si nous ne faisons pas attention à l'espace utilisé, nous pouvons perdre de l'information importante, comme un point fixe. Ainsi, le but de ce mémoire est de définir un système dynamique combinatoire ayant un temps discret, un espace combinatoire et une méthode pour l'étudier basée sur les invariants et leurs liens entre eux.

## 1.2 La théorie des graphes

### 1.2.1 Les Graphes

Dans cette section, nous nous intéressons aux graphes [Ski08] afin de visualiser les applications multivoques de notre système dynamique combinatoire que nous utilisons plus

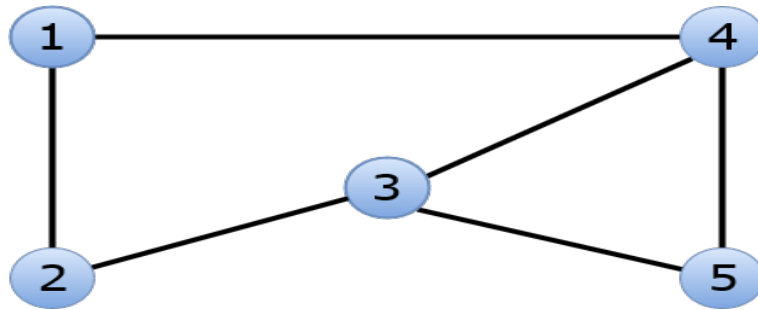


Figure 1.2 – Exemple de graphe non orienté

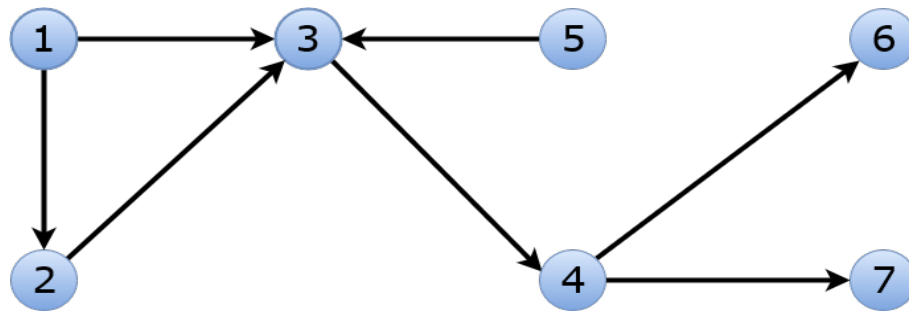


Figure 1.3 – Exemple de graphe orienté

tard. De plus, la représentation sous forme de graphe permet d'exploiter des algorithmes efficaces pour vérifier qu'un graphe est cyclique et de d'autres propriétés que nous utilisons plus tard.

**Définition 1.7.** *Un graphe  $\mathcal{G}$  est une paire  $(V, E)$ .  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  est l'ensemble des arêtes tel que  $E \subset V \times V$ . Nous pouvons ajouter une orientation sur les arêtes. S'il n'y a pas d'orientation, alors, l'arête  $(x, y)$  est équivalente à  $(y, x)$  pour  $x, y \in V$ . Dans l'autre cas, nous distinguons la paire  $(x, y)$  et  $(y, x)$ , c'est-à-dire  $(x, y) \neq (y, x)$ . Une flèche est ajoutée pour indiquer l'orientation. De plus, nous ajoutons une multiplicité aux arêtes s'il y a plusieurs arêtes différentes entre deux sommets.*

**Exemple 1.8.** *À la Figure 1.2, nous avons un exemple de graphe non orienté. L'ensemble des sommets est  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et l'ensemble des arêtes est  $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$ .*

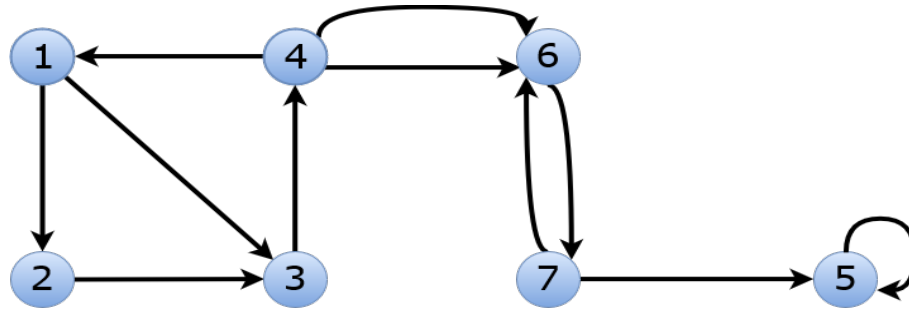


Figure 1.4 – Exemple plus complexe de graphe orienté

À la Figure 1.3, nous voyons un exemple de graphe orienté. L'ensemble des sommets est  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  et l'ensemble des arêtes est  $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 3), (4, 6), (4, 7)\}$ .

**Définition 1.9.** Soient  $\mathcal{G}$  un graphe et  $x, y \in V$ . Un chemin entre  $x$  et  $y$  est une suite d'arêtes telle que  $(x, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_n, a_{n+1})$  et  $(a_{n+1}, y) \in E$  et  $x, y, a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in V$ .

**Exemple 1.10.** À la Figure 1.4, nous avons un graphe orienté plus complexe. L'ensemble de sommets est  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  et l'ensemble des arêtes est  $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 6)^2, (6, 7), (7, 6), (7, 5), (5, 5)\}$ . Nous remarquons qu'il y a plusieurs flèches pour la paire  $(4, 6)$  car  $(4, 6)$  est de multiplicité 2. De plus, nous pouvons aussi avoir l'arête  $(5, 5)$  qui est représentée par une boucle.

Un exemple de chemin entre le sommet 1 et 7 est  $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 6)$  et  $(6, 7)$ . De plus, le chemin  $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$  et  $(4, 1)$  est un cycle. Un graphe qui contient des cycles est appelé un graphe cyclique. Un graphe qui ne contient pas de cycle est dénommé un graphe acyclique.

**Définition 1.11.** Soit  $\mathcal{G}$  un graphe orienté. Nous définissons une composante fortement connexe  $g$ , un sous-graphe de  $\mathcal{G}$  tel que pour chaque  $x, y \in V_g$ , il existe un chemin de  $x$  à  $y$ . Pour  $E_g$ , nous ajoutons les arêtes utilisées pour les chemins entre  $x$  et  $y$ . Pour

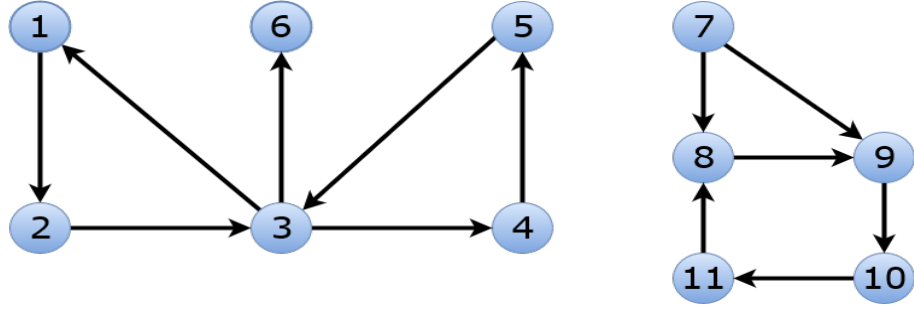


Figure 1.5 – Exemple de composantes fortement et faiblement connexes

les composantes faiblement connexes, l'orientation de  $\mathcal{G}$  est ignorée et nous prenons les sous-graphes  $g$  tels que pour chaque  $x, y \in V_g$ , il existe un chemin de  $x$  à  $y$ .

**Remarque 1.12.** Dans le cas d'un graphe non orienté, les composantes fortement et faiblement connexes sont équivalentes. Donc, nous les nommons simplement des composantes connexes.

**Exemple 1.13.** À la Figure 1.5, le graphe est défini par l'ensemble des sommets  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  et l'ensemble des arêtes  $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 3), (7, 8), (7, 9), (8, 9), (9, 10), (11, 8), (10, 11)\}$ .

Les composantes fortement connexes de ce graphe sont :

$$C_1 = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 3)\})$$

$$C_2 = (\{8, 9, 10, 11\}, \{(8, 9), (9, 10), (10, 11), (11, 8)\})$$

$$C_3 = (\{7\}, \emptyset), C_4 = (\{6\}, \emptyset)$$

Les composantes faiblement connexes de ce graphe sont :

$$c_1 = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 3), (3, 6)\})$$

$$c_2 = (\{7, 8, 9, 10, 11\}, \{(7, 8), (7, 9), (8, 9), (9, 10), (10, 11), (11, 8)\})$$

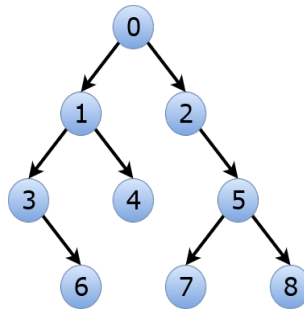


Figure 1.6 – Exemple d’un arbre avec 0 comme racine

Nous nous intéressons aussi à une structure plus précise d’un graphe nommée un arbre [MS05].

**Définition 1.14.** *Un arbre est un graphe acyclique avec un sommet que nous identifions comme la racine de l’arbre. De plus, à partir de la racine, nous avons accès à tous les sommets.*

Voici de la terminologie que nous allons utiliser sur les arbres.

**Définition 1.15.** — *Les sommets d’un arbre sont appelés des nœuds.*

- *S’il y a une flèche orientée entre le nœud  $a$  et  $b$ , alors,  $a$  est un nœud parent de  $b$  et  $b$  est un nœud enfant de  $a$*
- *Si deux nœuds ont le même parent, alors, ils sont des nœuds voisins.*
- *Les branches sont les sous-arbres ayant comme racine les enfants de la racine principale.*
- *La profondeur d’un nœud  $a$  est le nombre de nœuds entre la racine et  $a$ . La racine est de profondeur 0.*
- *Le degré sortant d’un nœud est le nombre de flèches sortantes.*

Voir la Figure 1.6 pour un exemple d’arbre où la racine est le sommet 0.

De plus, nous pouvons ajouter une structure supplémentaire sur l’arbre en identifiant

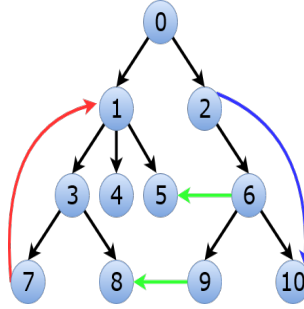


Figure 1.7 – Exemple d'un arbre avec les différents types d'arêtes

trois nouveaux types d'arêtes :

- Une arête vers l'avant est une arête partant d'un nœud à un nœud plus profond dans l'arbre en bleu sur la Figure (1.7).
- Une arête vers l'arrière est une arête partant d'un nœud à un nœud moins profond dans l'arbre en rouge sur la Figure (1.7).
- Une arête transversale est une arête partant d'une branche à l'autre en vert sur la Figure (1.7).

Cette structure augmentée sera utile pour montrer l'algorithme de Tarjan et l'arbre simplicial.

### 1.2.2 Des structures de données

Nous nous intéressons aux types de structures de données utilisées pour un graphe et nous présentons les deux structures les plus simples qui vont être utilisées pour encoder un graphe.

La première structure de donnée est la matrice d'adjacence. Nous utilisons une matrice  $n \times n$  pour encoder l'information où  $n$  est le nombre de sommets dans le graphe  $\mathcal{G}$ . Soit  $A$  une matrice d'adjacence d'un graphe. Alors, il y a un isomorphisme entre les nœuds du graphe et les indices entre 1 et  $n$ . De plus,  $a_{ij}$  est le nombre d'arêtes partant du sommet

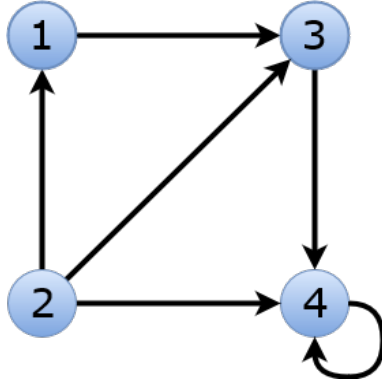


Figure 1.8 – Exemple de graphe pour la matrice d’adjacence et la liste d’adjacence

$i$  allant au sommet  $j$ . Dans le cas d’un graphe non orienté, la matrice d’adjacence est symétrique.

**Exemple 1.16.** À partir de la Figure 1.8, nous obtenons la matrice adjacence suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La deuxième structure de donnée pour encoder un graphe est la liste d’adjacence. Elle utilise une liste de listes de longueur  $n$  où  $n$  est le nombre de sommet dans le graphe. Le  $i$ ème élément de la liste de listes représente la liste des arêtes ayant comme source le  $i$ ème sommet.

**Exemple 1.17.** À la Figure 1.8, nous obtenons la liste suivante des sommets :  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Chaque sommet a sa liste de sommets : la liste 1 :  $\{3\}$ , la liste 2 :  $\{1, 3, 4\}$ , la liste 3 :  $\{4\}$  et la liste 4 :  $\{4\}$ .

Le tableau (1.1) contient le nombre d’opérations nécessaires pour faire une action sur le graphe. Nous supposons que c’est le pire cas possible pour chacun. Soient  $n$  le nombre de sommets et  $m$  le nombre d’arêtes.



	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Quantité de mémoire	$n^2$	$m + n$
Accès à un sommet	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n)$
Accès à une arête	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(m + n)$
Ajout d'un sommet	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)$
Suppression d'un sommet	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$
Ajout ou suppression d'une arête	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(m + n)$

Tableau 1.1 – Comparaison de la liste d'adjacence et de la matrice d'adjacence

Les deux structures sont bonnes pour représenter les graphes, mais nous choisissons une structure selon la densité du graphe. Nous appelons un graphe dense s'il y a beaucoup d'arêtes entre les sommets et un graphe creux, s'il y a peu d'arêtes entre les sommets. Donc, comme les opérations de la matrice d'adjacence ne sont pas affectées par le nombre d'arêtes, alors nous préférons utiliser la liste d'adjacence quand le graphe est creux. En général, la matrice d'adjacence est meilleure, mais plus couteuse sur la mémoire.

### 1.2.3 Algorithmes

Nous présentons quelques algorithmes sur les graphes que nous avons utilisés dans ce travail.

#### Algorithme pour parcourir un graphe

Nous nous intéressons à une méthode permettant de parcourir un graphe  $\mathcal{G}$  quelconque. Il y a deux techniques permettant de parcourir un graphe. La première méthode est un parcours en profondeur et la deuxième est un parcours en largeur. Le parcours en profondeur favorise à chercher le fond des chemins au lieu de regarder ses voisins. Inversement, pour le parcours en largeur, il favorise à regarder ses voisins avant de les explorer. Les deux manières utilisent la récursivité pour parcourir le graphe. Une application intéressante

est de vérifier si un graphe orienté est acyclique ou non. Pour ce faire, il faut ajouter une marque sur chaque sommet que nous visitons durant le parcours. De plus, nous marquons les sommets quand nous revenons vers l'arrière. L'algorithme s'arrête quand nous voulons marquer un sommet qui est déjà marqué. Alors, nous avons trouvé un cycle et le graphe est cyclique. De plus, il faut s'assurer que chaque sommet soit au moins visité une fois. Le temps de l'algorithme, dans le pire cas, est  $\mathcal{O}(m + n)$  car nous devons visiter tous les sommets et toutes les arêtes au moins une fois par un parcours en profondeur ou un parcours en largeur.

### **La fermeture transitive d'un graphe**

La fermeture transitive d'un graphe permet de trouver s'il y existe un chemin entre deux sommets. Soit un graphe de départ  $G_1$ . L'algorithme nous donne un autre graphe  $G_2$  tel que  $G_1$  et  $G_2$  ont les mêmes sommets. Par contre, les ensembles des arêtes sont différents. Soient  $x_1$  et  $y_1$  deux sommets de  $G_1$  et  $x_2$  et  $y_2$  les mêmes sommets pour  $G_2$ . S'il existe un chemin entre les sommets  $x_1$  et  $y_1$ , alors, nous ajoutons une arête entre les sommets  $x_2$  et  $y_2$ . Ainsi, le nouveau graphe  $G_2$ , avec une matrice d'adjacence, nous permet d'obtenir en un temps constant s'il y existe un chemin entre deux sommets du graphe  $G_1$ . Une méthode simple pour l'implémenter est de parcourir le graphe en utilisant un parcours en largeur ou en profondeur. Durant le parcours du graphe, nous marquons les sommets que nous visitons pour éviter de traiter un même sommet plus qu'une fois. Nous ajoutons une arête entre les sommets quand nous passons d'un sommet à l'autre. De plus, nous l'appliquons de façon rétroactive. C'est-à-dire, que si nous ajoutons une arête entre les sommets  $x$  et  $y$ , alors, pour tous les sommets  $z$  qui ont une arête entre  $z$  et  $x$ , nous ajoutons aussi une arête entre  $z$  et  $y$ . Cet algorithme a une complexité de  $\mathcal{O}(n^3)$ .

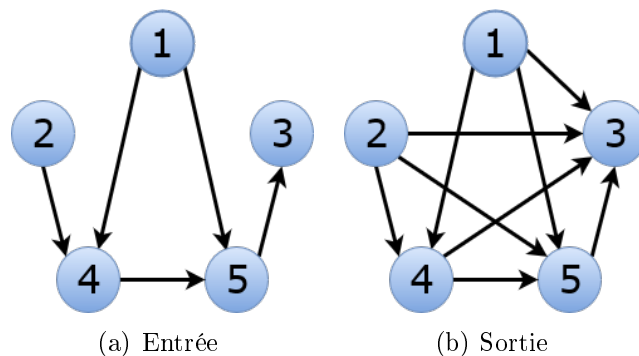


Figure 1.9 – Exemple de calcul de la fermeture transitive d'un graphe

### Algorithme de Tarjan : les composantes fortement connexes

L'algorithme de Tarjan [Tar72] permet de partitionner un graphe en ses composantes fortement connexes. Ainsi, l'algorithme prend en entrée un graphe orienté et en sortie une liste des composantes fortement connexes de ce graphe. Maintenant, décrivons l'algorithme de Tarjan. Tout d'abord, nous définissons une relation d'équivalence entre les sommets d'une même composante fortement connexe. Notons  $[v]$  la classe d'équivalence des composantes fortement connexes du sommet  $v$ . Nous utilisons le parcours en profondeur d'un sommet  $v$  quelconque. En calculant ce parcours, nous obtenons un arbre avec des arêtes vers l'avant, vers l'arrière et transversales que nous notons l'arbre PeP (parcours en profondeur) de  $v$ . S'il y a une composante fortement connexe dans l'arbre PeP de  $v$ , alors, elle est connexe. Autrement dit, la composante de  $v$  est en un morceau dans l'arbre PeP de  $v$ . Plus précisément, nous nous intéressons à séparer la composante fortement connexe du reste de l'arbre. Nous notons le nœud de la tête de la composante fortement connexe le moins profond de l'arbre PeP. Ainsi, le problème de trouver les composantes fortement connexes revient à un problème de trouver la tête de chaque composante fortement connexe.

Nous avons trois cas à gérer dans l'arbre PeP de  $v$ . D'abord, si l'arbre PeP de  $v$  ne contient

pas d'arête transversale ou vers l'arrière, alors, l'arbre PeP est acyclique et  $[v]$  a un seul élément. Dans le deuxième cas, si nous avons au moins une arête vers l'arrière dans l'arbre PeP de  $v$  et qu'elle pointe vers un ancêtre de  $v$ , alors,  $v$  n'est pas une tête et il fait partie d'un cycle. Le troisième cas est si nous avons seulement des arêtes transversales sortantes entre les branches de l'arbre PeP de  $v$ . Pour faciliter ce cas, nous enlevons les sommets qui sont des têtes déjà traitées auparavant. Montrons que, si l'arbre PeP de  $v$  a des arêtes transversales sortantes, alors,  $v$  n'est pas la tête d'une composante fortement connexe. D'abord, une remarque importante est que le parcours en profondeur construit un arbre où les arêtes transversales pointent toujours vers un nœud moins profond dans l'arbre. Supposons qu'une arête transversale parte de  $u$  vers  $w$ . Soit  $z$  la tête de la composante fortement connexe  $[w]$ . Alors,  $z$  est visitée plus tard que  $w$ . Si  $z$  est dans une branche séparée, alors, nous avons fini de visiter et supprimons  $z$  et  $w$ . Par contre, ceci contredit le fait que nous avons l'arête transversale de  $u$  vers  $w$ . Donc,  $z$  est un ancêtre de  $v$ . Nous construisons le chemin suivant. Nous commençons par l'arête  $u - w$ . Ensuite,  $z$  est la tête de  $w$  implique qu'il y a un chemin de  $w$  à  $z$ . De plus,  $z$  est l'ancêtre de  $v$ . Donc, nous obtenons un cycle et  $v$  n'est pas la tête de la composante fortement connexe. Ainsi, ce que nous devons faire est de vérifier l'existence d'une arête transversale ou une arête vers l'arrière de l'arbre PeP pour vérifier que  $[v]$  est une tête ou non.

Pour l'implémentation de l'algorithme, nous définissons deux valeurs : le temps de découverte durant le parcours en profondeur noté  $\text{tmpDec}(v)$  et le temps minimum de découverte durant le parcours en profondeur noté  $\text{tmpMin}(v)$ . Donc, nous remarquons quelques propriétés qui découlent de ces définitions. Si nous avons une arête transversale ou une arête vers l'arrière cela implique que  $\text{tmpDec}(v) > \text{tmpMin}(v)$ . De plus,  $v$  est une tête d'une composante fortement connexe si, après le calcul de l'arbre PeP,  $\text{tmpMin}(v) = \text{tmpDec}(v)$ . Pour finir, si l'arbre PeP de  $v$  n'a pas d'arête transversale ni une arête vers l'arrière, alors, nous obtenons l'égalité  $\text{tmpMin}(v) = \text{tmpDec}(v)$ . De plus, nous utilisons

une pile qui nous permettra d'identifier le sous-arbre enraciné en  $v$ . Nous empilons les sommets visités dans la pile. Ainsi, quand nous avons fini de visiter le sommet  $v$ , tous les nœuds de l'arbre  $v$  sont maintenant dans la pile. Si  $v$  est une tête et nous avons enlevé les autres têtes dans l'arbre, alors, les nœuds restants dans la pile sont  $[v]$ .

Maintenant, nous pouvons décrire l'algorithme. Nous effectuons un parcours en profondeur en conservant les valeurs de `tmpMin` et `tmpDec` de chaque nœud. Avec ses valeurs, nous pouvons détecter les têtes des composantes fortement connexes et nous les supprimons au fur et à mesure. Cet algorithme est en temps linéaire car nous effectuons un parcours en profondeur et les manipulations ajoutées dans l'algorithme de Tarjan sont négligeables.

En synthèse, la théorie des graphes sera utile car nous aurons des objets finis avec des relations qui se représentent bien dans un graphe. D'abord, nous avons couvert les définitions de bases des graphes. Ensuite, nous avons comparé la liste d'adjacence et la matrice d'adjacence qui sont deux structures de données de graphe. Pour finir, nous avons vu quelques algorithmes dont nous aurons besoin.

# CHAPITRE 2

## Un espace combinatoire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une structure combinatoire permettant de définir un système dynamique combinatoire. Nous utilisons les complexes simpliciaux. D'abord, nous définissons les simplexes et les complexes simpliciaux géométriques. Ensuite, nous généralisons cette définition pour obtenir les complexes simpliciaux abstraits. De plus, nous montrons deux méthodes d'implémentation pour encoder les informations nécessaires d'un complexe simplicial. Dans ce travail, le diagramme de Hasse et l'arbre simplicial sont présentés. Pour finir, nous expliquons quelques manières différentes pour construire un complexe simplicial à partir d'un nuage de points.

### 2.1 Les complexes simpliciaux

**Définition 2.1.** *Un ensemble de points  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  dans  $\mathbb{R}^N$ , avec  $n \leq N$ , est géométriquement indépendant, si pour tous les scalaires  $t_i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, n$ , qui satisfont*

à :

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0, \sum_{i=0}^n t_i v_i = 0$$

nous avons que  $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$ .

Cette définition d'ensemble géométriquement indépendant a un lien avec la définition des familles de vecteurs linéairement indépendantes dans le sens de l'algèbre linéaire.

**Lemme 2.2.** *Un ensemble  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  est géométriquement indépendant si et seulement si l'ensemble des vecteurs  $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  est une famille linéairement indépendante dans le sens de l'algèbre linéaire.*

*Démonstration.* Soit un ensemble  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  géométriquement indépendant.

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n t_i v_i = -t_0 v_0 \implies \sum_{i=1}^n t_i (v_i - v_0) = -\sum_{i=0}^n t_i v_0.$$

Or,  $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ . Par conséquent,  $\sum_{i=1}^n t_i (v_i - v_0) = 0$  et  $0 = t_i$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Donc,  $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  est une famille linéairement indépendante.

De l'autre côté, supposons que  $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  est une famille linéairement indépendante. Alors, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^n t_i (v_i - v_0) = 0 \implies \sum_{i=1}^n t_i v_i - \sum_{i=1}^n t_i v_0 = 0.$$

Posons  $t_0 = -\sum_{i=1}^n t_i$ . De plus, par l'indépendance linéaire, nous avons  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$ , ce qui entraîne que  $t_0 = 0$ . Donc,  $\sum_{i=0}^n t_i v_i = 0$  et  $\sum_{i=0}^n t_i = -\sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^n t_i = 0$ . Ceci implique que  $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$ . Ainsi  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  est géométriquement indépendant.

□

Maintenant, nous pouvons définir les simplexes qui seront les objets d'intérêts de notre espace combinatoire.

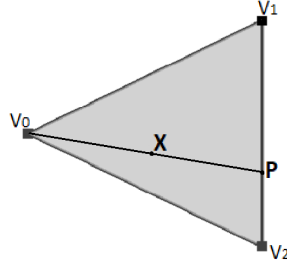


Figure 2.1 –  $V_0, V_1$  et  $V_2$  forment un 2-simplexe.

**Définition 2.3.** Soit  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  un ensemble géométriquement indépendant dans  $\mathbb{R}^N$ . Nous définissons un  $n$ -simplexe appartenant au sous-espace engendré par  $v_0, v_1, \dots, v_n$  comme l'ensemble de tous les points  $x \in \mathbb{R}^N$  tels que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i,$$

où  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$  et  $t_i \geq 0$  pour tout  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Note : Les  $t_i$  sont appelés des coordonnées barycentriques.

**Proposition 2.4.** Les coordonnées barycentriques d'un point  $x$  du simplexe sont uniques.

*Démonstration.* Supposons que les coordonnées barycentriques de  $x$  ne sont pas uniques. Alors, ils existent  $t_i$  et  $\lambda_i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, n$ , telles que  $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$  avec  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ ,  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$  avec  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$  et  $t_i \neq \lambda_i$  pour au moins une valeur de  $i$ . Donc,  $0 = x - x = \sum_{i=0}^n (t_i - \lambda_i) v_i = 0$  et  $\sum_{i=0}^n (t_i - \lambda_i) = 1 - 1 = 0$ . De plus, les  $v_i$  sont géométriquement indépendant, alors  $t_i - \lambda_i = 0$  pour tout  $i$ . Donc, les coordonnées barycentriques sont uniques.  $\square$

Passons à certains exemples pour comprendre la forme d'un  $n$ -simplexe pour un certain  $n$ .



**Exemple 2.5.** Le 0-simplexe est engendré par un point  $v_0$ . Ainsi,  $t_0 = 1$ . Alors le seul point est  $x = v_0$ . Donc, le 0-simplexe est un singleton.

**Exemple 2.6.** Le 1-simplexe, engendré par  $v_0$  et  $v_1$ , consiste en tous les points de la forme  $x = t_0v_0 + t_1v_1$  tel que  $t_0 + t_1 = 1$ . Ainsi,  $t_1 = 1 - t_0$  et  $x = t_0v_0 + (1 - t_0)v_1$  est le 1-simplexe formé de l'ensemble des points de la droite entre  $v_0$  et  $v_1$ . Le 1-simplexe est aussi appelé arête.

**Exemple 2.7.** Le 2-simplexe  $\sigma$ , engendré par  $v_0$ ,  $v_1$  et  $v_2$ , est l'ensemble des points  $x = t_0v_0 + t_1v_1 + t_2v_2$  tels que  $t_0 + t_1 + t_2 = 1$ . Si  $t_0 \neq 1$ , alors

$$t_0 + t_1 + t_2 = 1 \implies 1 - t_0 = t_1 + t_2 \implies 1 = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_0}$$

Ainsi,  $x = t_0v_0 + (1 - t_0)((\frac{t_1}{1 - t_0})v_1 + (\frac{t_2}{1 - t_0})v_2)$  représente un point entre  $v_0$  et  $p$ , où  $p$  est le point entre  $v_1$  et  $v_2$ . Donc, le 2-simplexe est un triangle. Dans la Figure 2.1, le point  $x$  est obtenu avec  $t_0 = \frac{1}{2}$ ,  $t_1 = \frac{1}{6}$  et  $t_2 = \frac{1}{3}$ .

**Exemple 2.8.** En suivant une démarche similaire du 2-simplexe, nous pouvons montrer qu'un 3-simplexe est un tétraèdre.

Voici quelques définitions sur les simplexes que nous utiliserons comme les sommets, les faces, la frontière et l'adhérence.

**Définition 2.9.** Soit  $\sigma$  un  $n$ -simplexe avec les points  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  :

- Les points  $v_0, v_1, \dots, v_n$  sont appelés les sommets.
- $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  est un  $n$ -simplexe engendré par les sommets  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ .
- Le nombre  $n$  est la dimension d'un  $n$ -simplexe. Nous notons  $\sigma^{(p)}$  un simplexe de dimension  $p$ .
- Tous les sous-ensembles de  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  sont appelés les faces et nous les notons  $\tau \leq \sigma$  si  $\tau$  est une face de  $\sigma$ . En particulier, les faces différentes de  $\sigma$  sont les faces propres et nous notons  $\tau < \sigma$ .

- Si  $\tau > \sigma$ , alors, nous disons que  $\tau$  est une coface de  $\sigma$  qui est équivalent à dire que  $\sigma$  est une face de  $\tau$ .
- L'adhérence de  $\sigma$  est l'ensemble de toutes les faces de  $\sigma$  noté  $\text{Cl } \sigma$ .
- La frontière de  $\sigma$  est l'ensemble de toutes les faces propres de  $\sigma$ . Elle est notée  $\text{Bd } \sigma$ .

Maintenant que nous connaissons les simplexes, nous nous intéressons à une structure qui contient plus qu'un simplexe. Nous nous restreignons à deux conditions pour obtenir un ensemble ayant des propriétés intéressantes.

**Définition 2.10.** *Un complexe simplicial  $K$  dans  $\mathbb{R}^N$  est un ensemble de simplexes tel que :*

1. *Toutes les faces d'un simplexe dans  $K$  sont aussi dans  $K$ .*
2. *L'intersection entre deux simplexes de  $K$  est une face pour chacun des simplexes ou l'ensemble vide.*

La première condition d'un complexe simplicial nous indique que nous voulons que toutes les faces de tous les simplexes soient dans le complexe simplicial. La deuxième condition représente la manière dont nous voulons coller les simplexes ensemble. Nous voulons que ce collement se fasse sur les faces des simplexes.

**Exemple 2.11.** *À la Figure 2.2, nous avons des exemples et des contre-exemples sur les complexes simpliciaux. Les Figures 2.2(a) et 2.2(b) représentent des complexes simpliciaux. Les Figures 2.2(c) et 2.2(d) ne représentent pas des complexes simpliciaux car, dans les deux cas, l'intersection entre les deux 2-simplexes n'est pas une face pour chacun des 2-simplexes.*

**Remarque 2.12.** *Soit  $K$  un complexe simplicial composé seulement de 0-simplexes et de 1-simplexes. Nous remarquons que les 0-simplexes sont les sommets et les 1-simplexes les*

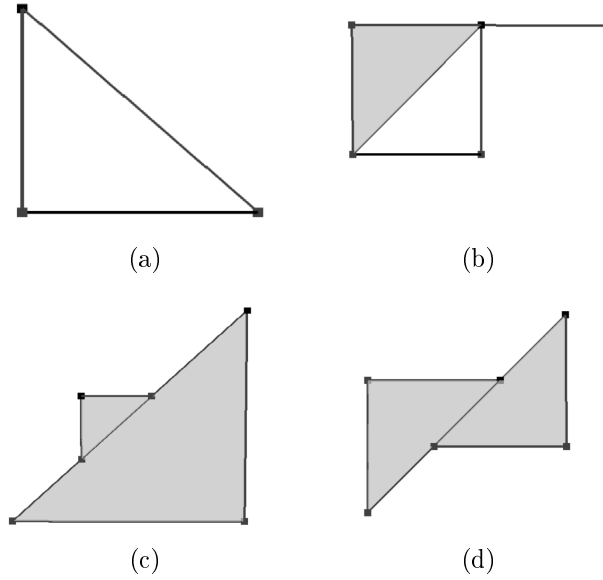


Figure 2.2 – Exemples et contre-exemples de complexes simpliciaux

arêtes d'un graphe. Donc, les complexes simpliciaux sont une généralisation des graphes non orientés.

Notons  $K_d$  l'ensemble des simplexes de dimension  $d$  dans un complexe simplicial. Par exemple, l'ensemble des sommets dans  $K$  est noté par  $K_0$ .

Parfois, il n'est pas nécessaire d'avoir une structure géométrique à notre espace combinatoire. Par contre, nous voulons garder des relations similaires que les deux conditions de la définition 2.10 des complexes simpliciaux.

**Définition 2.13.** *Un complexe simplicial abstrait est un ensemble  $K$  qui contient des ensembles finis et non vides. Si  $A$  est un élément de  $K$ , alors, tous les sous-ensembles de  $A$  sont aussi dans  $K$ .*

Ainsi, nous remarquons qu'un complexe simplicial de la définition 2.10 respecte la définition 2.13 d'un complexe simplicial abstrait. Parfois, l'inverse est aussi vrai. Cela dépend

de l'espace que nous avons choisi pour projeter le complexe simplicial, ce qui est la réalisation géométrique de  $K$ .

## 2.2 Implémentation

Dans cette section, nous discuterons de l'implémentation informatique des complexes simpliciaux. Nous développerons deux structures : le diagramme de Hasse et l'arbre simplicial.

### 2.2.1 Diagramme de Hasse

Le diagramme de Hasse est utilisé pour afficher un ensemble partiellement ordonné. Donc, nous les définissons et nous l'appliquons pour le cas des complexes simpliciaux. De plus, le diagramme de Hasse est représenté par un graphe orienté, ce qui nous permet de l'implémenter dans une application informatique.

**Définition 2.14.** *Un ensemble partiellement ordonné est un ensemble  $E$  avec une relation binaire  $\leq$  qui respecte les trois axiomes suivants :*

1. *La réflexivité : Soit  $x \in E$ . Alors,  $x \leq x$ .*
2. *L'antisymétrie : Soit  $x, y \in E$ . Si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , alors,  $x = y$ .*
3. *La transitivité : Soit  $x, y, z \in E$ . Si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , alors,  $x \leq z$ .*

Ce qu'il faut retenir de cette définition est que nous ne pouvons pas forcément comparer tous les éléments entre eux. Si nous pouvons comparer tous les éléments entre eux, alors, c'est un ensemble totalement ordonné.

**Exemple 2.15.** *Soit  $E$  un ensemble d'ensembles et nous prenons l'inclusion comme relation binaire entre les ensembles. Posons  $E = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ .*

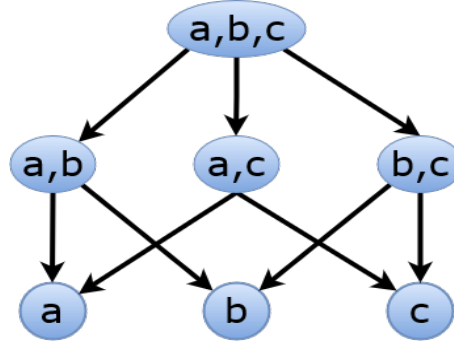


Figure 2.3 – Diagramme de Hasse de l'exemple 2.15.

*Donc, nous avons que  $\{a\} \subseteq \{a,b\}$ , mais  $\{a\} \not\subseteq \{b,c\}$ .*

Un diagramme de Hasse est une manière de visualiser un ensemble partiellement ordonné à l'aide d'un graphe. Les éléments de l'ensemble sont les nœuds. Nous ajoutons une arête partant de  $x$  à  $y$ , si  $x \geq y$  et il n'existe pas d'éléments  $z$  tels que  $x \geq z$  et  $z \geq y$ . Nous enlevons ces arêtes pour éviter de surcharger le diagramme.

Dans le cas des complexes simpliciaux, nous obtenons un ensemble partiellement ordonné en prenant les simplexes comme ensemble et l'inclusion comme relation. Pour le diagramme de Hasse, nous remarquons qu'une arête du nœud  $\sigma$  à  $\tau$  suit la relation :  $\dim \sigma = \dim \tau + 1$ . L'algorithme 1 permet de construire un diagramme de Hasse à partir d'un complexe simplicial.

Calculons le nombre de nœuds et d'arêtes d'un diagramme de Hasse d'un complexe simplicial  $K$ . Soit  $K_{max} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$  ensemble des simplexes maximaux de  $K$  tel que pour tout  $i \neq j$ ,  $\sigma_i$  n'est pas une face de  $\sigma_j$ . De plus, pour un simplexe de dimension  $d$ , nous devons avoir toutes ses faces dans  $K$ . Alors, nous obtenons  $\sum_{i=0}^d \binom{d+1}{i} = 2^{d+1} - 1$  faces. Un  $d$ -simplexe a  $d+1$  arêtes sortantes qui pointent vers ses faces propres sauf pour  $d = 0$  qui n'a pas d'arête sortante. Donc, la quantité d'arêtes d'un  $d$ -simplexe avec toutes ses faces est  $\sum_{i=0}^{d-1} (d+1-i) \binom{d+1}{i}$ . Avec ces calculs, nous pouvons trouver une borne

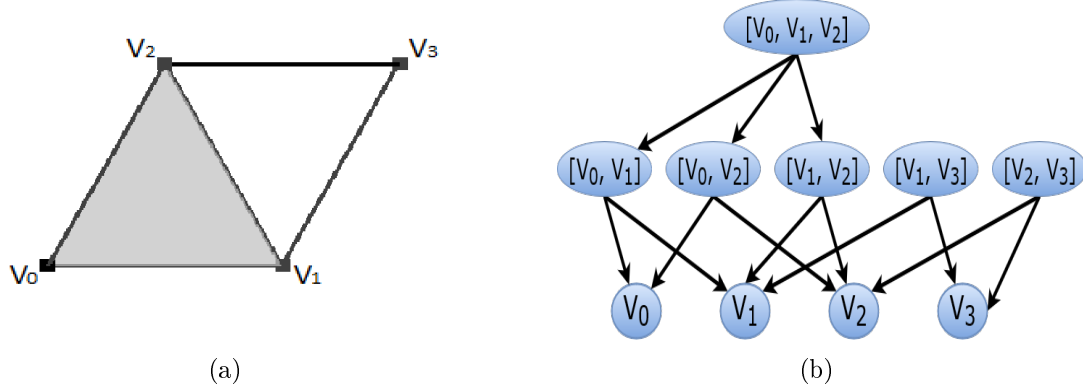


Figure 2.4 – Un complexe simplicial avec son diagramme de Hasse.

---

**Algorithme 1** Construire un diagramme de Hasse à partir d'un complexe simplicial.

---

**Entrée :** Une liste  $K$  contenant tous les simplexes du complexe simplicial.

**Sortie :** Un diagramme de Hasse  $\mathcal{G}$ .

Initialise  $\mathcal{G}$  à un graphe vide.

**Pour tout**  $\sigma \in K$  **faire**

    Ajouter un nœud  $N$  contenant  $\sigma$  à  $\mathcal{G}$ .

**Pour tout**  $M \in \mathcal{G} \setminus N$  **faire**

        Soit  $\tau$  le simplexe contenu dans  $M$ .

**Si**  $\dim \sigma - 1 = \dim \tau$  et  $\tau \subset \sigma$  **Alors**

            Ajouter une arête partant de  $N$  à  $M$ .

**Sinon Si**  $\dim \sigma + 1 = \dim \tau$  et  $\sigma \subset \tau$  **Alors**

            Ajouter une arête partant de  $M$  à  $N$ .

**Fin Si**

**Fin Pour**

**Fin Pour**

**Retourne** Le diagramme de Hasse  $\mathcal{G}$ .

---

maximale sur le nombre d'arêtes et de nœuds pour un diagramme de Hasse. Soient  $D$  la dimension maximale des simplexes dans  $K$ ,  $N$  le nombre de simplexes dans l'ensemble des simplexes maximaux,  $n$  le nombre de nœuds du graphe et  $m$  le nombre d'arêtes du graphe. Nous obtenons :

$$n \leq N(2^{D+1} - 1) \quad (2.1)$$

$$m \leq N \sum_{i=0}^{D-1} (D+1-i) \binom{D+1}{i} \quad (2.2)$$

Pour obtenir l'égalité, il faut que les simplexes maximaux soient de mêmes dimensions et ils sont tous mutuellement disjoints.

Cette structure de diagramme de Hasse est intéressante. Ceci nous permet de visualiser les complexes simpliciaux. Par contre, il y a plusieurs inconvénients à cette implémentation. D'abord, un complexe simplicial génère rapidement un très grand graphe. Par (2.1) et (2.2), ils ont une complexité exponentielle. Alors, nous obtenons facilement un très grand graphe quand  $n$  est grand. Aussi, il est difficile d'ajouter ou supprimer un simplexe car il faut ajouter ou supprimer plusieurs nœuds et plusieurs arêtes dans le graphe tout en conservant la structure du complexe simplicial, ce qui peut être très coûteux. De plus, la recherche d'un simplexe peut être ardue, parce que nous devons utiliser un parcours en profondeur ou en largeur du graphe pour le trouver. La prochaine structure que nous introduisons permet de mieux gérer la structure de données des complexes simpliciaux.

### 2.2.2 L'arbre simplicial

Dans cette sous-section, nous montrons une autre méthode plus efficace pour travailler avec les complexes simpliciaux. Cette structure de données est appelée l'arbre simplicial [BM14] [Mar14].

Avant de définir l'arbre simplicial, nous allons ajouter des conditions sur les sommets et ajouter un indice sur les simplexes. Soit  $n$  le nombre de sommets. Alors, nous numérotions les sommets de  $1, 2, \dots, n$ . Donc, si nous rassemblons les sommets, ils forment des mots qui nous donnent les simplexes. Plus rigoureusement, un  $d$ -simplexe abstrait est un mot ordonné de longueur  $d + 1$ , c'est-à-dire, soit  $\sigma = \{v_{l_0}, v_{l_1}, \dots, v_{l_d}\}$  où  $v_{l_i} \in K_0$ ,  $l_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $l_0 < l_1 < \dots < l_d$ . De plus, nous définissons  $\text{dernier}(\sigma)$ , la dernière étiquette du simplexe, comme suit  $\text{dernier}(\sigma) = v_{l_d}$ . Maintenant, nous pouvons définir la structure de données.

**Définition 2.16.** *Soit  $K$  un complexe simplicial. Un arbre simplicial conserve les simplexes de  $K$  sous forme de mot et doit satisfaire les trois propriétés suivantes :*

1. *Les nœuds de l'arbre sont en bijection avec les simplexes de  $K$ . De plus, la racine est associée au simplexe vide.*
2. *Chaque nœud de l'arbre, sauf la racine, contient l'étiquette d'un sommet. Plus précisément, un nœud associé à un simplexe  $\sigma \neq \emptyset$  contient l'étiquette  $\text{dernier}(\sigma)$ .*
3. *Un chemin entre la racine et le  $\text{dernier}(\sigma)$  contient tous les sommets du simplexe  $\sigma$ . De plus, les étiquettes sont en ordre croissant.*

Avec cette structure, nous obtenons une autre propriété. La profondeur d'un nœud dans l'arbre représente la dimension  $+ 1$  d'un simplexe, sauf pour la racine qui est 0. Donc, les enfants directement sous la racine sont tous les sommets du complexe simplicial.

**Exemple 2.17.** *À la Figure 2.5, nous avons un complexe simplicial avec son arbre simplicial. Pour alléger la figure, nous avons affiché qu'une seule flèche sortante qui pointe vers ses enfants. Pour les flèches en pointillés, nous reviendrons plus tard. Le nœud en vert avec l'étiquette 4 représente le simplexe  $[1, 3, 4]$  et le nœud en jaune avec l'étiquette 5 représente le simplexe  $[3, 5]$ .*



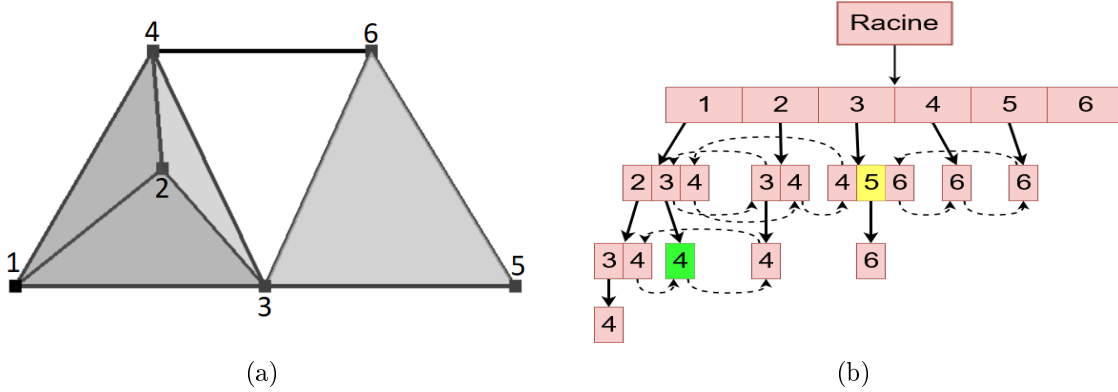


Figure 2.5 – Un complexe simplicial (a) et son arbre simplicial (b).

Pour mieux comprendre l'arbre simplicial, nous allons expliquer comment une recherche de simplexe est accomplie dans cette structure. Soit un simplexe  $\sigma = [v_{l_0}, v_{l_1}, \dots, v_{l_d}]$  avec  $l_0 < l_1 < \dots < l_d$  et qui est contenu dans l'arbre simplicial. Nous commençons à la racine et cherchons son enfant avec une étiquette égale à  $l_0$ . Ensuite, avec le nœud contenant  $l_0$ , nous refaisons une recherche similaire pour trouver  $l_1$ . De manière récursive, nous réappliquons cette méthode jusqu'à temps que nous trouvions  $l_d$ , ce qui arrête l'algorithme car nous avons trouvé le nœud correspondant au simplexe recherché. En revanche, si le simplexe n'est pas dans l'arbre simplicial, alors, il existe au moins un sommet  $v_{l_i}$  tel que le simplexe  $\tau = [l_0, l_1, \dots, l_i]$  est dans l'arbre simplicial, mais le simplexe  $[l_0, l_1, \dots, l_i, l_{i+1}]$  n'y est pas. Donc, il faudrait ajouter, après le nœud représentant  $\tau$ , une suite de nœuds avec les étiquettes  $l_{i+1}$  jusqu'à  $l_d$ .

Pour améliorer l'efficacité de la structure, nous ajoutons une liste circulaire qui relie les nœuds de la même profondeur et qui ont la même étiquette. Donc, à la Figure 2.5(b), les flèches en pointillées représentent les listes circulaires. De plus, nous ajoutons un pointeur d'un nœud enfant à son parent pour obtenir un accès en temps constant.

De plus, nous utilisons un dictionnaire de grandeur linéaire pour effectuer une recherche, une insertion ou une suppression entre les nœuds qui ont le même nœud parent. Ceci nous

permet d'accélérer le temps de recherche entre les enfants. Donc, chaque nœud parent pointe vers un dictionnaire contenant tous ses enfants. Par exemple, les dictionnaires que nous pouvons utiliser sont un arbre rouge et noir [MS05] ou une table de hachage. L'ajout de cette structure n'affecte pas la complexité asymptotique de la mémoire d'un arbre simplicial.

Avant d'écrire le fonctionnement des algorithmes de base, définissons quelques notations dont nous aurons besoin pour calculer leur complexité algorithmique. Soit  $\deg(\mathcal{T})$  le degré sortant maximal d'un nœud qui n'est pas la racine pour un arbre simplicial  $\mathcal{T}$ . De plus, nous notons  $D_m$  le nombre d'opérations maximal entre faire une recherche, une insertion ou une suppression d'un simplexe selon le dictionnaire utilisé. Donc, si nous avons choisi un arbre rouge et noir  $D_m = \mathcal{O}(\log(\deg(\mathcal{T})))$  dans le pire cas et si nous utilisons une table de hachage  $D_m = \mathcal{O}(1)$  amorti. Nous définissons  $\mathcal{T}_l^{>d}$ , pour une étiquette  $l$  et un indice  $d$ , le nombre de nœuds avec une profondeur plus grande que  $d$  et contient l'étiquette  $l$ . Par exemple, reprenons la Figure 2.5, nous obtenons  $\mathcal{T}_4^{>1} = 4$  qui sont tous les simplexes de dimension strictement plus grands qu'un et contiennent l'étiquette 4. En particulier, si  $l$  est la plus petite étiquette, alors,  $\mathcal{T}_l^{>0} = 1$ . Si  $l$  est la plus grande étiquette, alors,  $\mathcal{T}_l^{>0}$  est égale au nombre de cofaces du simplexe  $[v_{l_0}]$ .

Dans la suite, nous allons décrire les algorithmes suivants :

- Rechercher, ajouter et enlever un simplexe.
- Trouver les cofaces.
- Trouver les faces.

### Rechercher, enlever et ajouter un simplexe

D'abord, pour la recherche d'un simplexe, nous l'avons déjà expliquée plus haut. Cet algorithme prend  $\mathcal{O}((d+1)D_m)$  opérations où  $d$  est la dimension du simplexe.

Pour enlever un simplexe  $\sigma$ , nous devons trouver le simplexe et enlever son nœud associé. Par le fait même, nous enlevons aussi le sous-arbre qui a  $\sigma$  comme racine. Par contre, il est possible qu'il reste encore des cofaces de  $\sigma$ . Donc, il faut trouver les cofaces que nous discuterons dans la prochaine sous-section. Ainsi, en enlevant les cofaces, nous satisfaisons la définition 2.10 d'un complexe simplicial. L'algorithme d'enlever un seul simplexe revient à chercher un simplexe qui est de complexité  $\mathcal{O}((d+1)D_m)$ .

Pour ajouter un simplexe  $\sigma = [v_{l_0}, v_{l_1}, \dots, v_{l_d}]$ , comme plus haut, nous cherchons le nœud qui représente le simplexe  $[v_{l_0}, v_{l_1}, \dots, v_{l_i}]$  et qui n'a pas d'enfant contenant l'étiquette  $l_{i+1}$ . Nous ajoutons les nœuds  $l_{i+1}$  jusqu'à  $l_d$  avec comme parent le nœud  $l_i$  à  $l_{d-1}$ . Donc,  $\sigma$  est ajouté, mais il est possible que le complexe simplicial de l'arbre simplicial ne satisfasse plus à la définition de complexe simplicial car certaines faces de  $\sigma$  ne font pas parties du complexe simplicial. Ainsi, nous ajoutons ses faces d'une dimension inférieure de la forme  $[v_{l_0}, v_{l_1}, \dots, v_{l_{i-1}}, \hat{v}_{l_i}, v_{l_{i+1}}, \dots, v_{l_d}]$  où  $\hat{v}_{l_i}$  est le sommet enlevé. De plus, nous l'appliquons de manière récursive sur ses faces. Donc, dans le pire des cas, il faudrait ajouter toutes ses faces possibles. Le calcul pour le nombre de faces d'un  $d$ -simplexe est  $\sum_{i=0}^d \binom{d}{i} = 2^d$  et nous obtenons la complexité algorithmique  $\mathcal{O}(2^d D_m)$ .

### Trouver les cofaces

Soit  $\tau = [v_{l_0}, v_{l_1}, \dots, v_{l_d}]$  et nous cherchons les cofaces de  $\tau$ , c'est-à-dire, les simplexes  $\sigma$  tels que  $\tau > \sigma$ . Les cofaces de  $\tau$  sont de la forme  $[*v_{l_0} * v_{l_1} * \dots * v_{l_d} *]$  où  $*$  est une suite de sommets arbitraire en respectant l'ordre ou un ensemble vide. En général, les suites de sommets  $*$  sont différentes. D'abord, nous nous intéressons aux simplexes de la forme  $[*v_{l_0} * v_{l_1} * \dots * v_{l_d}]$ . Ceci nous permet d'obtenir facilement les simplexes de la forme  $[*v_{l_0} * v_{l_1} * \dots * v_{l_d} *]$ . En utilisant les listes circulaires  $L_i$ , nous définissons  $L_i(l_d)(i > d)$  l'ensemble de tous les nœuds contenant l'étiquette  $l_d$  avec une profondeur d'au moins  $d+1$ . Pour chaque nœud  $N_{l_d} \in L_i(l_d)(i > d)$ , nous parcourons l'arbre simplicial de

manière ascendante en cherchant les simplexes  $[*v_{l_0} * v_{l_1} * \dots * v_{l_d}]$ . Comme nous avons un ordre sur les sommets, nous pouvons enlever certains cas dans notre recherche. Par exemple, si nous cherchons le nœud contenant  $l_{i-1}$  à partir de  $l_i$ , alors, nous ne vérifions pas les parents de  $N_{l_i}$  avec une étiquette  $l_k$  telle que  $l_k < l_{i-1}$ . Après cette recherche, il reste à trouver les simplexes  $[v_{l_0} * v_{l_1} * \dots * v_{l_d}]$ . Soit les nœuds  $N_{l_d}$  obtenus de la recherche ascendante. Tous les nœuds des sous-arbres avec la racine  $N_{l_d}$  sont de la forme  $[v_{l_0} * v_{l_1} * \dots * v_{l_d}]$ . Donc, la sortie de cet algorithme est une liste contenant les racines  $N_{l_d}$ . Le nombre d'opérations de l'algorithme dépend de  $\mathcal{T}_{dernier(\sigma)}^{d>}$ . Si  $k$  est la dimension du simplexe maximal du complexe simplicial, alors, le parcours ascendant est au pire  $\mathcal{O}(k)$ . Donc, nous obtenons la complexité  $\mathcal{O}(k \cdot \mathcal{T}_{dernier(\sigma)}^{>j})$ .

### Trouver les faces

Nous nous intéressons à trouver les faces propres de dimension maximale d'un simplexe  $\sigma$ . Si nous avons besoin d'obtenir toutes ses faces, nous réappliquons l'algorithme sur ses faces propres. Plus précisément, soit un simplexe  $\sigma = [v_{l_0}, v_{l_1}, \dots, v_{l_d}]$  et nous cherchons les simplexes  $\tau_i = [v_{l_0}, v_{l_1}, \dots, v_{l_{i-1}}, \hat{v}_{l_i}, v_{l_{i+1}}, \dots, v_{l_d}]$  pour tout  $i = 0, 1, \dots, d$ . Nous savons que les simplexes  $\tau_i$  existent car l'arbre simplicial contient l'information d'un complexe simplicial. D'abord, notons le nœud  $N_{l_i}$  représentant le simplexe  $[v_{l_0}, v_{l_1}, \dots, v_{l_i}]$  pour  $i = 0, 1, \dots, d$  et ces nœuds ensembles forment un chemin de la racine jusqu'à  $\sigma$ . Pour chaque nœud  $N_{l_i}$ , nous connaissons le mot  $[l_{i+1}, l_{i+2}, \dots, l_d]$  et le nœud  $N_{l_{i-1}}$ . Donc, à partir de  $N_{l_{i-1}}$ , nous cherchons le mot  $[l_{i+1}, l_{i+2}, \dots, l_d]$  pour obtenir le simplexe  $\tau_i = [v_{l_0}, v_{l_1}, \dots, v_{l_{i-1}}, \hat{v}_{l_i}, v_{l_{i+1}}, \dots, v_{l_d}]$ . La complexité algorithmique est  $\mathcal{O}(d^2 D_m)$ .

Maintenant, comparons les deux structures de données : le diagramme de Hasse et l'arbre simplicial. Le tableau 2.1 compare quatre structures de données avec quelques méthodes de bases qui ont été montrées plus haut. Comme le diagramme de Hasse(DH) est un graphe orienté, nous pouvons le représenter par une liste d'adjacence ou une matrice

d'adjacence. L'arbre simplicial(AS) a besoin d'un dictionnaire. Pour la comparaison, nous utilisons un arbre rouge et noir et une table de hachage. Nous prenons  $n$  de l'équation (2.1) et  $m$  de l'équation (2.2). Soit  $d$  la dimension du simplexe.

Par simplexe	DH matrice d'adjacence	DH liste d'adjacence	AS arbre rouge et noir	AS table de hachage
Recherche	$\mathcal{O}(n + m)$	$\mathcal{O}(n + m)$	$\mathcal{O}((d + 1) \log(\deg(\mathcal{T})))$	$\mathcal{O}(d + 1)$
Ajout	$\mathcal{O}(2^d n)$	$\mathcal{O}(2^d)$	$\mathcal{O}(2^d (\log(\deg(\mathcal{T}))))$	$\mathcal{O}(2^d)$
Retrait	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n + m)$	$\mathcal{O}((d + 1) \log(\deg(\mathcal{T})))$	$\mathcal{O}(d + 1)$
Trouver les faces	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(d^2 (\log(\deg(\mathcal{T}))))$	$\mathcal{O}(d^2)$
Trouver les cofaces	$\mathcal{O}(m + n)$	$\mathcal{O}(m + n)$	$\mathcal{O}(k \mathcal{T}_{dernier(\sigma)}^{>d})$	$\mathcal{O}(k \mathcal{T}_{dernier(\sigma)}^{>d})$

Tableau 2.1 – Comparaison en terme d'opérations du diagramme de Hasse et de l'arbre simplicial

Une remarque intéressante est que l'arbre simplicial dépend de la dimension des simplexes au lieu de la quantité de simplexes dans le diagramme de Hasse. Grâce aux dictionnaires de recherche linéaire, nous n'avons pas besoin de vérifier tous les nœuds du diagramme comme pour chercher un simplexe. En général, l'arbre simplicial est plus rapide pour effectuer des opérations, sauf pour faire la recherche des faces qui est plus complexe.

Pour cette structure de l'arbre simplicial, nous remarquons qu'il y a certaines parties de l'arbre qui sont répétées plusieurs fois. Donc, il est possible de compresser l'arbre pour réduire la quantité de mémoire nécessaire. Nous référons le lecteur à cet article pour plus de détails [BCST17].

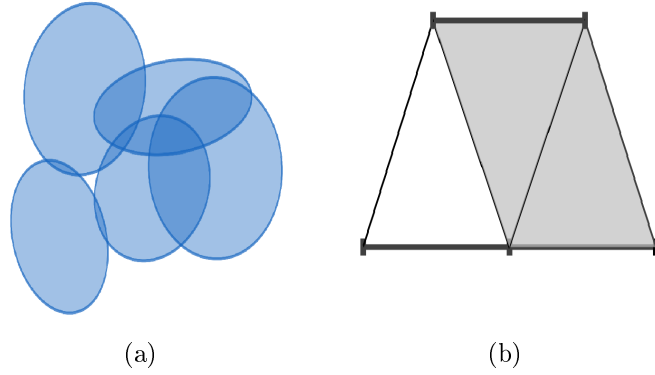


Figure 2.6 – Un exemple d’un nerf de recouvrement (a) et son complexe simplicial (b).

## 2.3 Du nuage de points au complexe simplicial

Dans cette section, nous nous intéressons à construire un complexe simplicial à partir d’un nuage de points sur un espace topologique  $X \subset \mathbb{R}^N$ . Pour le faire, nous allons construire un autre espace topologique à partir d’ensembles convexes qui est une approximation de  $X$ . Ces ensembles forment un nerf de recouvrement de notre espace topologique. De plus, la convexité de l’ensemble nous permet de conserver les propriétés topologiques intéressantes. Pour finir, nous allons construire quatre complexes simpliciaux différents : le complexe de Čech, le complexe de Rips, le complexe de Delaunay et le complexe Alpha.

**Définition 2.18.** Soit  $X$  un espace topologique et  $F = \{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$  où  $F_\alpha \subset X$  et  $\mathbb{I}$  un ensemble des indices. Nous construisons le nerf de recouvrement de  $F$ , noté  $\text{Nrf } F$ . Nous ajoutons un  $(k - 1)$ -simplexe quand  $k$  éléments de  $F$  ont une intersection non nulle.

**Exemple 2.19.** À la Figure 2.6(a), nous avons un espace topologique  $K$  et il est formé par un ensemble  $F$  de 5 éléments. Donc, nous obtenons 5 0-simplexes. Ensuite, nous avons 7 sous-ensembles non vides entre des intersections deux à deux de  $F$  et 2 sous-ensembles non vides entre des intersections de trois ensembles de  $F$ . Alors, nous obtenons 7 1-simplexes et 2 2-simplexes. Ainsi, nous obtenons le complexe simplicial de la Figure

2.6(b).

Nous nous intéressons à ce recouvrement car il nous permet de faire une approximation d'un espace topologique en conservant ses invariants topologiques comme l'homotopie [Mun84].

**Théorème 2.20.** *Soit  $F$  un ensemble contenant des ensembles fermés et convexes dans un espace euclidien. Alors, le nerf de recouvrement de  $F$  et l'union des ensembles dans  $F$  ont la même homotopie.*

Ce théorème est complexe et demande plusieurs notions de topologie algébrique. Nous référons l'article suivant pour les détails [Bor48].

Donc, nous allons construire plusieurs ensembles  $F$  différents qui sont des ensembles fermés et convexes, ce qui nous donnera des types de complexes simpliciaux différents. De plus, si deux types de complexes forment le même complexe simplicial, alors, ils ont des invariants topologiques équivalents.

Pour le reste de la section, nous utiliserons la norme euclidienne classique.

**Définition 2.21.** *Soient  $S$  un ensemble de points dans  $\mathbb{R}^N$  et  $B_x(r) = x + r\mathbb{B}^N$  une boule fermée, centrée en  $x$  et de rayon  $r$  où  $\mathbb{B}^N$  est la boule unitaire. Le complexe de Čech de  $S$  et de rayon  $r$  est le nerf de recouvrement de l'ensemble des boules.*

$$\check{\text{Cech}}(r) = \{\sigma \subset S \mid \cap_{x \in \sigma} B_x(r) \neq \emptyset\}.$$

**Remarque 2.22.** *Nous remarquons que  $r_0 \leq r$  implique que  $\check{\text{Cech}}(r_0) \subset \check{\text{Cech}}(r)$ . Par contre, si la valeur de  $r$  est trop grande, il se peut que le complexe de Čech obtenu ne soit plus géométriquement réalisable dans  $\mathbb{R}^N$ . À la figure 2.7, nous avons quatre sommets dans  $\mathbb{R}^2$  et quatre boules qui s'intersectent à la région verte. Donc, nous ajoutons un 3-simplexe. Mais, le 3-simplexe n'est pas géométriquement indépendant dans  $\mathbb{R}^2$ . En revanche, nous obtenons toujours un complexe simplicial abstrait.*

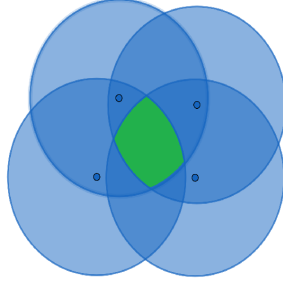


Figure 2.7 – Exemple d'un nerf de recouvrement qui ne forme pas un complexe simplicial géométriquement réalisable dans  $\mathbb{R}^2$ .

Montrons une autre construction du nerf de recouvrement. De la même manière que le complexe de Čech, nous construisons des boules fermées autour de chaque point et nous vérifions les intersections deux à deux entre les boules pour obtenir les 1-simplexes. Par contre, pour les simplexes de dimension supérieure, nous ajoutons un  $n$ -simplexe si toutes ses faces propres sont ajoutées.

De plus, nous pouvons définir cet nouvel ensemble en fonction du rayon de la boule. D'abord, nous notons  $\text{diam } \sigma$  la plus petite valeur  $r$  telle que, pour tout  $x, y \in \sigma$ ,  $\text{dist}(x, y) \leq r$ . Soit  $\sigma$  un  $d$ -simplexe pour  $d > 1$ . Nous remarquons que le  $\text{diam } \sigma = \text{diam } \tau$  tel que  $\tau$  est le plus long des 1-simplexes contenu dans  $\sigma$ . Donc, pour ajouter un  $d$ -simplexe, il faut une intersection entre deux boules de son plus long 1-simplexe, c'est-à-dire,  $\text{diam } \sigma \leq 2r$ . Ainsi, nous obtenons la définition suivante.

**Définition 2.23.** *Le complexe de Vietoris-Rips pour un rayon  $r$  est donné par l'ensemble :*

$$\text{Rips}(r) = \{\sigma \subseteq S \mid \text{diam } \sigma \leq 2r\}.$$

**Exemple 2.24.** *À la Figure 2.8, nous avons un exemple d'un nerf de recouvrement d'un complexe de Čech et un complexe de Rips. Nous avons 7 boules fermées. Nous remarquons une différence entre le complexe de Čech et le complexe de Rips. Nous obtenons un 2-simplexe supplémentaire dans le cas du complexe de Rips car nous avons toutes ses faces*



*propres.*

Nous remarquons que  $\check{\text{Cech}}(r) \subset \text{Rips}(r)$  par l'exemple 2.24. De plus, même si le complexe de Rips ressemble au complexe de Čech, le complexe de Rips est plus facile à calculer car nous avons seulement à vérifier les intersections avec deux boules. Dans le cas du complexe de Čech, il faut faire une vérification des  $n$ -intersections avec les  $n$  boules pour ajouter un  $(n - 1)$ -simplexe. Par contre, il est aussi possible d'obtenir l'inclusion inverse pour des valeurs de rayons différentes.

**Lemme 2.25.** *Soient  $S$  un ensemble fini de points et  $r \geq 0$ , nous avons que  $\text{Rips}(r) \subseteq \check{\text{Cech}}(\sqrt{2}r)$ .*

*Démonstration.* D'abord, nous disons qu'un simplexe est régulier, si toutes ses arêtes sont de même longueur. De plus, nous définissons un simplexe standard de dimension  $N$ , noté  $\Delta^N$ , engendré par les points  $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{N+1}$  où il y a un 1 seulement à la  $i$ ème position pour  $i = 1, 2, \dots, N, N + 1$ . Ainsi, pour tout  $\sigma^{(1)} \in \Delta^N$ , nous obtenons  $\|\sigma\| = \sqrt{2}$ . Par symétrie, la distance de l'origine à un point sur un simplexe standard est la distance des coordonnées barycentriques. Soit le point  $z = (\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+1}, \dots, \frac{1}{N+1})$  et  $\|z\| = \frac{1}{\sqrt{N+1}}$ . Donc, le barycentre du simplexe standard est aussi le centre de la plus petite  $d$ -sphère passant par les sommets de  $\Delta^N$ . Soit  $r_N$  le rayon de cette sphère et nous obtenons  $r_N^2 = 1 - \|z\|^2 = \frac{N}{N+1}$ . De plus, si  $N$  tend vers l'infini, alors  $\frac{N}{N+1}$  converge vers 1. Donc, pour tout ensemble contenant au plus  $N + 1$  points de la même sphère, toutes les paires de points ont une distance de  $\sqrt{2}$  ou plus. Cela implique que tous les simplexes réguliers de diamètre  $\sqrt{2}$  ou moins appartiennent à  $\check{\text{Cech}}(r_N)$ . Si nous multiplions par  $\sqrt{2}r$ , nous obtenons que les simplexes réguliers sont des éléments de  $\text{Rips}(r) \subseteq \check{\text{Cech}}(\sqrt{2}r \cdot r_N) \subseteq \check{\text{Cech}}(\sqrt{2}r)$ . Pour les simplexes non réguliers, nous remarquons qu'ils seront ajoutés en même temps que les simplexes réguliers si le diamètre du simplexe régulier et non régulier est le même. Donc, les inclusions sont vraies pour les simplexes non réguliers.  $\square$

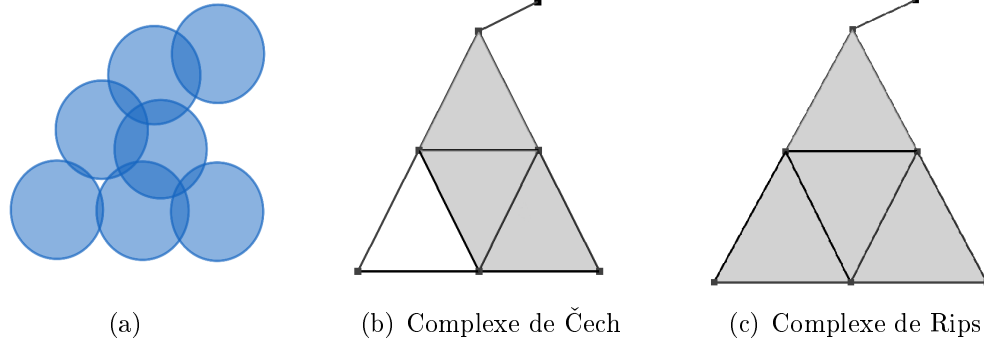


Figure 2.8 – Exemple du nerf de recouvrement (a). En (b), nous avons son complexe de Čech et en (c) le complexe de Rips.

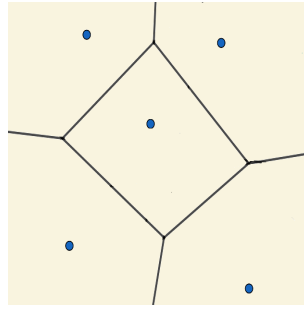


Figure 2.9 – Exemple d'un diagramme de Voronoï avec 5 points.

Par contre, le complexe de Rips a le même problème que le complexe de Čech. Le complexe de Rips, pour une grande valeur de rayon, ne forme pas un complexe simplicial qui est géométriquement réalisable dans  $\mathbb{R}^N$ . Les deux prochains complexes simpliciaux nous assurent de conserver la réalisation géométrique.

**Définition 2.26.** Soit  $S$  un ensemble de points dans  $\mathbb{R}^N$ . Une cellule de Voronoï d'un point  $u \in S$  est l'ensemble des points  $x \in \mathbb{R}^N$  tels que  $u$  est le point le plus près de  $x$  par rapport aux autres points de  $S$ ,  $V_u = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - u\| \leq \|x - v\|, v \in S\}$ . Nous appelons le diagramme de Voronoï l'ensemble de toutes les cellules de Voronoï  $u \in S$ .

Donc, chaque cellule de Voronoï forme un ensemble fermé et convexe. Alors, nous pouvons définir son nerf de recouvrement.

**Définition 2.27.** *Le complexe de Delaunay est l'ensemble fini  $S \subseteq \mathbb{R}^N$  qui est équivalent au nerf de recouvrement du diagramme de Voronoï :*

$$\text{Delaunay} = \{\sigma \subseteq S \mid \cap_{u \in \sigma} V_u \neq \emptyset\}.$$

Nous l'appelons le complexe de Delaunay car il est construit comme la triangulation de Delaunay. Ici, le complexe de Delaunay est toujours géométriquement réalisable dans  $\mathbb{R}^N$ . Par contre, nous n'avons pas de paramètre pour gérer la distance maximale pour créer un complexe simplicial. De plus, le complexe de Delaunay est unique. Donc, pour la prochaine construction, nous ajoutons un paramètre pour empêcher de créer un simplexe pour les points qui sont trop éloignés.

**Définition 2.28.** *Soient  $S$  un nombre fini de points dans  $\mathbb{R}^N$  et  $r \geq 0$ . L'union des boules  $B_u(r)$  est l'ensemble des points qui est à une distance de  $r$  pour au moins un point dans  $S$ . Soit  $R_u(r) = B_u(r) \cap V_u$  l'intersection de la boule avec sa cellule de Voronoï. Ainsi, le complexe Alpha est le nerf de recouvrement de  $R_u(r)$  pour tout  $u \in S$ .*

$$\text{Alpha}(r) = \{\sigma \subseteq S \mid \cap_{u \in \sigma} R_u(r) \neq \emptyset\}.$$

Donc, nous combinons la méthode pour construire le complexe de Čech et la méthode pour construire le complexe de Delaunay pour obtenir le complexe Alpha. Grâce aux cellules de Voronoï, nous assurons que le complexe simplicial est toujours géométriquement réalisable.

Ainsi, le complexe Alpha est une bonne construction pour obtenir un complexe simplicial à partir d'un ensemble de points car il nous permet de conserver la réalisation géométrique du complexe simplicial. Nous utilisons le paramètre du rayon des boules pour obtenir un complexe simplicial qui reflète mieux les données. Par exemple, si nos données sont récupérées sur un espace topologique d'un cercle, alors, nous voudrions conserver le trou

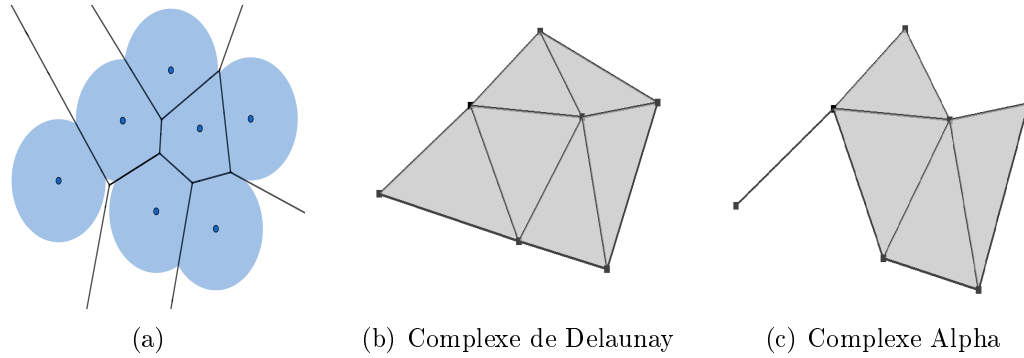


Figure 2.10 – Exemple du nerf de recouvrement(a). En (b) nous avons le complexe de Delaunay(b) et en (c) nous avons le complexe Alpha.

dans le complexe simplicial. Nous choisissons une bonne valeur de  $r$  pour construire le complexe simplicial désiré.

En synthèse, nous avons défini un complexe simplicial pour profiter de la forme combinatoire des simplexes. Ensuite, nous avons montré deux manières d'implémenter les complexes simpliciaux dans une application par le diagramme de Hasse et par l'arbre simplicial. Pour finir, nous avons montré quelques manières de construire des complexes simpliciaux à partir d'un nuage de points tout en conservant des invariants topologiques de l'espace topologique approximé. Ainsi, nous pouvons maintenant définir les vecteurs de notre champ vectoriel combinatoire.

# CHAPITRE 3

## La théorie de Morse discrète

Dans ce chapitre, nous survolons la théorie de Morse discrète introduite par Robin Forman[For98]. Il propose une analogie discrète de la théorie de Morse classique [Mat02]. Cette théorie classique nous permet d'étudier des variétés. Pour le faire, nous utilisons une fonction de Morse qui est définie sur une variété et nous étudions ses points critiques. Selon les coordonnées locales du point critique, nous lui attribuons un indice de Morse. Selon certaines conditions, ces indices de Morse nous donnent de l'information sur la variété. Pour définir l'indice de Morse, nous devons faire un changement de variable aux coordonnées locaux aux points critiques associés. Par le lemme de Morse, dans le cas d'une surface, les coordonnées locaux à un point critique  $(x_0, y_0)$  peuvent prendre quatre formes différentes. Soient  $X, Y$  les nouvelles variables dans le changement de coordonnée. Les formes possibles sont :  $F(X, Y) = \pm X^2 \pm Y^2 + f(x_0, y_0)$ . Donc, l'indice de Morse est défini par le nombre de variables ayant un signe négatif. Par exemple, si nous étudions la sphère unitaire  $\mathbb{S}^2$  avec la fonction hauteur, c'est-à-dire  $f(x, y, z) = z$ , alors, nous trouvons deux points critiques. Il y a un minimum pour le point  $(x, y, z) = (0, 0, -1)$  d'indice de Morse 0 et un maximum pour le point  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$  d'indice de Morse

2. Nous avons besoin de deux bols, un bol à l'envers pour le maximum et un bol pour le minimum pour reconstruire la sphère. Par conséquent, si nous avons une autre surface et qu'elle a des points critiques avec les mêmes indices de Morse, alors, les deux surfaces sont homéomorphes. Bref, c'est une méthode pour classifier des surfaces. En revanche, nous ne sommes pas intéressés à la classification des surfaces. Par contre, dans la théorie de Morse, les champs vectoriels gradients sont importants. Donc, Forman [For98] a construit des champs vectoriels gradients combinatoires dont nous nous inspirons pour attribuer une définition aux systèmes dynamiques combinatoires.

### 3.1 Les champs vectoriels combinatoires gradients et les fonctions de Morse discrètes

D'abord, nous utilisons l'espace combinatoire formé par les complexes simpliciaux, ce qui nous permet d'approximer une variété en la discrétisant. Commençons par définir la fonction de Morse discrète.

**Définition 3.1.** *Soit  $K$  un complexe simplicial. Une fonction  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Morse discrète si, pour tous  $\alpha^{(p)} \in K$ , elle respecte les deux conditions suivantes :*

1.  $H_f(\alpha) := \text{card}(\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\}) \leq 1$  où  $\beta^{(p+1)} \in K$ .
2.  $T_f(\alpha) := \text{card}(\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \geq f(\alpha)\}) \leq 1$  où  $\gamma^{(p-1)} \in K$ .

**Exemple 3.2.** *Vérifions l'exemple et le contre-exemple à la Figure 3.1 pour laquelle il y a une fonction  $f$  pour 3.1(a) et une fonction  $g$  pour 3.1(b). Dans le premier cas, nous avons deux simplexes qui ne satisfont pas la définition de la fonction de Morse discrète. Soit le sommet  $\sigma$  où  $f(\sigma) = 5$ . Nous avons deux simplexes de dimensions supérieures qui ont comme face  $\sigma$ . De plus,  $f(\sigma) = 5 \geq 2$  et  $f(\sigma) = 5 \geq 4$  implique que  $H_f(\sigma) = 2$ . Soit*

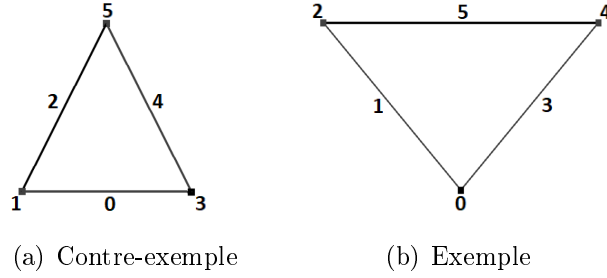


Figure 3.1 – Les fonctions de Morse discrètes sur un ensemble de 0-simplexes et 1-simplexes.

le 1-simplexe  $\tau$  où  $f(\tau) = 0$ . Le simplexe  $\tau$  a deux faces de dimension 0 avec  $1 \geq 0 = f(\tau)$  et  $3 \geq 0 = f(\tau)$ . Donc,  $T_f(\tau) = 2$  ne respecte pas la définition de la fonction de Morse discrète. Dans le deuxième cas, la fonction  $g$  satisfait les conditions d'une fonction de Morse discrète.

Comme dans le cas de la théorie de Morse classique, nous nous intéressons aussi aux points critiques. Mais, nous ne pouvons pas donner la définition usuelle des points critiques aux simplexes critiques. Donc, nous adaptons la définition pour les simplexes critiques d'une fonction de Morse discrète.

**Définition 3.3.** Un simplexe  $\alpha^{(p)}$  est critique si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $H_f(\alpha) = 0$ .
2.  $T_f(\alpha) = 0$ .

Sur les figures, les simplexes critiques sont en rouge.

**Lemme 3.4.** Soit  $K$  un complexe simplicial avec une fonction de Morse discrète  $f$ . Alors, pour tous les simplexes  $\alpha^{(p)}$ , soit  $H_f(\alpha) = 0$  ou  $T_f(\alpha) = 0$ .

*Démonstration.* Par contradiction, supposons qu'il y a un  $\tau \in K$  tel que  $H_f(\tau) = 1$  et  $T_f(\tau) = 1$ . Donc, il existe un  $\sigma \in K$  tel que  $\sigma > \tau$  et  $f(\sigma) \leq f(\tau)$ . Aussi, il existe un

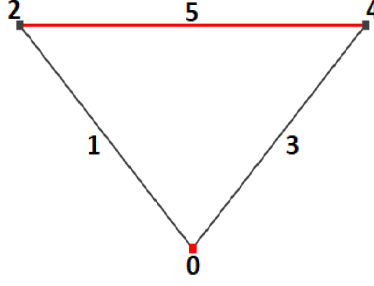


Figure 3.2 – Exemple des simplexes critiques notés en rouge.

$\gamma < \tau$  et  $f(\gamma) \geq f(\tau)$ . De plus, il existe  $\tau' \in K$  tel que  $\tau' \neq \tau$  et  $\gamma < \tau' < \sigma$  car, entre  $\gamma$  et  $\sigma$ , il y a deux dimensions de différence. Donc, il y a deux simplexes  $\tau$  et  $\tau'$  qui sont des cofaces de  $\gamma$  et ils sont des faces de  $\sigma$ . Nous avons que  $f(\sigma) \leq f(\tau)$  et  $f(\gamma) \geq f(\tau)$ . Ainsi, nous obtenons que  $f(\tau') < f(\sigma)$ . Si  $f(\tau') \geq f(\sigma)$ , alors,  $T_f(\sigma) = 2$ . Mais,  $f$  est une fonction de Morse discrète. Alors, ce cas n'arrive pas. Par le même argument avec  $\gamma$ , on a que  $f(\tau') > f(\gamma)$ . Par conséquent,  $f(\tau) \leq f(\gamma) < f(\tau') < f(\sigma) \leq f(\tau)$  d'où nous obtenons la contradiction.  $\square$

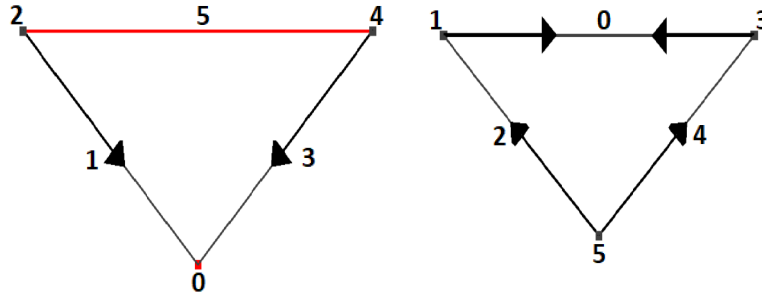
Maintenant que nous avons une fonction de Morse discrète, nous pouvons définir les champs vectoriels combinatoires de Forman. Nous utilisons la règle suivante pour la construction des vecteurs. Soit un simplexe  $\alpha^{(p)}$  une face de  $\beta^{(p+1)}$  avec une fonction de Morse discrète  $f$ . Si  $f(\alpha) \geq f(\beta)$ . Alors, nous dessinons une flèche de  $\alpha$  à  $\beta$ .

À l'aide du lemme précédent 3.4, nous avons qu'un simplexe  $\alpha$  quelconque satisfait à seulement un de ces trois cas :

1.  $\alpha$  est la queue d'une seule flèche ;
2.  $\alpha$  est la tête d'une seule flèche ;
3.  $\alpha$  n'est pas la tête ni la queue d'une flèche qui est un simplexe critique.

Maintenant que nous avons défini un vecteur dans l'espace des complexes simpliciaux, nous pouvons définir le champ vectoriel combinatoire.





(a) Avec une fonction de Morse discrète. (b) Avec une fonction qui n'est pas de Morse discrète.

Figure 3.3 – Dessin de vecteur par la règle  $f(\alpha) \geq f(\beta)$ . Alors,  $\alpha \rightarrow \beta$ .

**Définition 3.5.** *Un champ vectoriel combinatoire  $V$  sur un complexe simplicial est un ensemble de paires  $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\}$  de simplexes dans  $K$  tel que chaque simplexe de  $K$  est au plus dans une seule paire de  $V$ . Si un simplexe n'est contenu dans aucune paire, alors, le simplexe est critique.*

D'abord, nous remarquons qu'une fonction de Morse discrète engendre un champ vectoriel combinatoire défini plus haut. Par contre, est-ce que l'inverse est toujours vrai? Est-ce qu'il existe une fonction de Morse discrète qui engendre le même champ vectoriel combinatoire? Ceci n'est pas toujours vrai.

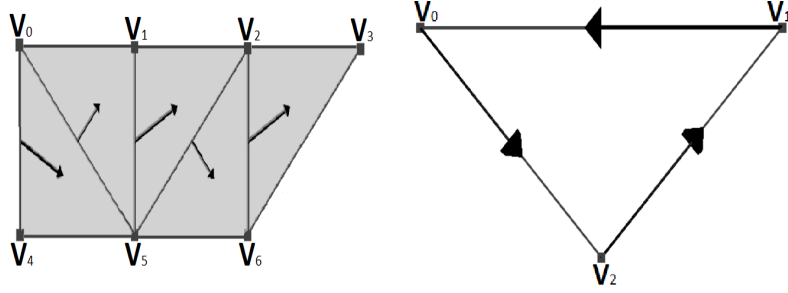
**Définition 3.6.** *Soit  $K$  un complexe simplicial. Un champ vectoriel combinatoire  $V$  sur  $K$  est gradient s'il y existe une fonction de Morse discrète  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  qui produit le même champ vectoriel combinatoire que  $V$ .*

Maintenant, cherchons un critère pour qu'un champ vectoriel combinatoire est gradient.

**Définition 3.7.** *Un  $v$ -chemin est une suite de simplexes :*

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)} \quad (3.1)$$

telle que pour chaque  $i = 0, 1, \dots, r$ , nous avons  $\{\alpha_i < \beta_i\} \in V$  et  $\beta_i > \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$ .



(a) Un  $v$ -chemin.

(b) Un  $v$ -chemin fermé non trivial.

Figure 3.4 – Exemples

De plus, si  $r \geq 0$  et  $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$ , alors, nous disons que le  $v$ -chemin est fermé non trivial.

Voici une manière de visualiser les  $v$ -chemins. Si un simplexe est à la queue d'une flèche, le prochain simplexe est le simplexe à la pointe de la même flèche. Si le simplexe est à la pointe d'une flèche, le prochain simplexe de la suite est une de ses cofaces, mais il est interdit de passer par le sens inverse de la flèche. De plus, dans la définition de  $v$ -chemin, nous ne nous intéressons pas aux simplexes critiques car nous voudrions vérifier, dans un champ vectoriel combinatoire, qu'il n'existe pas de  $v$ -chemin fermé et ce cas ne peut jamais arriver dans une suite de simplexes qui contient un simplexe critique. Nous le démontrerons dans le chapitre 5 dans un cas plus général.

**Exemple 3.8.** *Vérifions deux exemples de  $v$ -chemins de la Figure 3.4. Pour le premier exemple 3.4(a), nous avons un  $v$ -chemin avec la suite associée est  $[V_0, V_4], [V_0, V_4, V_5], [V_0, V_5], [V_0, V_1, V_5], [V_1, V_5], [V_1, V_2, V_5], [V_2, V_5], [V_2, V_5, V_6], [V_2, V_6], [V_2, V_3, V_6]$  de longueur 10. Pour le deuxième exemple 3.4(b), le  $v$ -chemin est fermé non trivial et la suite associée est  $[V_1], [V_0, V_1], [V_0], [V_0, V_2], [V_2], [V_2, V_1], [V_1]$  de longueur 7.*

Maintenant, vérifions l'effet de la valeur d'une fonction de Morse sur les  $v$ -chemins.

**Théorème 3.9.** *Soit  $V$  un champ vectoriel gradient combinatoire d'une fonction de Morse  $f$ . Alors, la suite (3.1) est un  $v$ -chemin si et seulement si pour  $i = 0, 1, \dots, r$ ,*

nous avons

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots > f(\alpha_r) \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1}).$$

*Démonstration.* Soit une suite de simplexes qui définit un  $v$ -chemin. Par la définition de  $v$ -chemin, nous avons  $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$  et  $\{\alpha_i < \beta_i\} \in \mathcal{V}$ . De plus,  $\alpha_{i+1} \neq \alpha_i$  ce qui entraîne que  $\{\alpha_{i+1} < \beta_i\} \notin \mathcal{V}$ . Alors, nous obtenons  $f(\beta_i) > f(\alpha_{i+1})$ , pour tout  $i$ . Par ailleurs, si nous avons  $\{\alpha_i < \beta_i\} \in \mathcal{V}$ , alors  $f(\alpha_i) \geq f(\beta_i)$ , pour tout  $i$ . Ainsi, nous obtenons la suite suivante :  $f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots > f(\alpha_r) \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1})$ .

De l'autre côté, soit une suite de simplexes telle que  $f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots > f(\alpha_r) \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1})$ . Si  $f(\alpha_i) \geq f(\beta_i)$ , nous obtenons  $\{\alpha_i < \beta_i\} \in \mathcal{V}$ . De plus, si  $f(\beta_i) > f(\alpha_{i+1})$ , alors, nous avons  $\{\alpha_{i+1} < \beta_i\} \notin \mathcal{V}$ , ce qui entraîne que  $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ . Donc, la suite  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_r, \beta_r, \alpha_{r+1}$  est un  $v$ -chemin.  $\square$

Nous remarquons s'il y a une fonction de Morse discrète sur le long d'un  $v$ -chemin, alors, elle est décroissante. Donc, nous ne pouvons pas avoir de  $v$ -chemin fermé non trivial. Ce résultat est présenté dans le prochain théorème.

**Théorème 3.10.** *Un champ vectoriel combinatoire  $V$  est gradient issu d'une fonction de Morse discrète si et seulement s'il ne possède aucun  $v$ -chemin fermé non trivial.*

Pour la démonstration de ce théorème, nous allons y revenir plus tard car nous allons traduire ce problème en un problème de la théorie des graphes. Donc, nous devons d'abord construire un graphe qui encode la même information que les  $v$ -chemins dans un champ vectoriel combinatoire.

Comme nous avons un complexe simplicial, nous utilisons son diagramme de Hasse et nous modifions l'orientation de certaines flèches. Soit un simplexe  $\alpha^{(p)}$  et un simplexe  $\beta^{(p+1)}$  tels que  $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$ . Dans le diagramme de Hasse, nous avons une arête allant

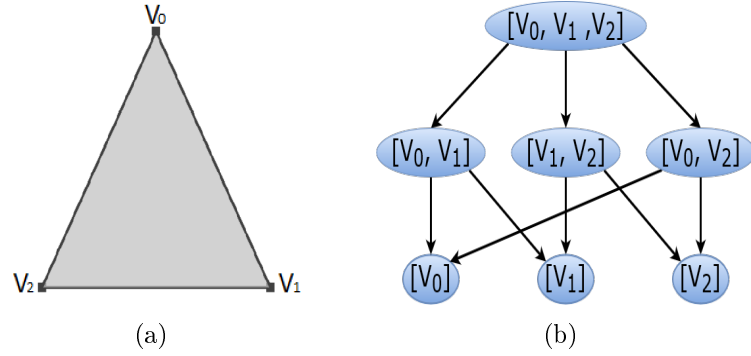


Figure 3.5 – Construction du diagramme de Hasse.

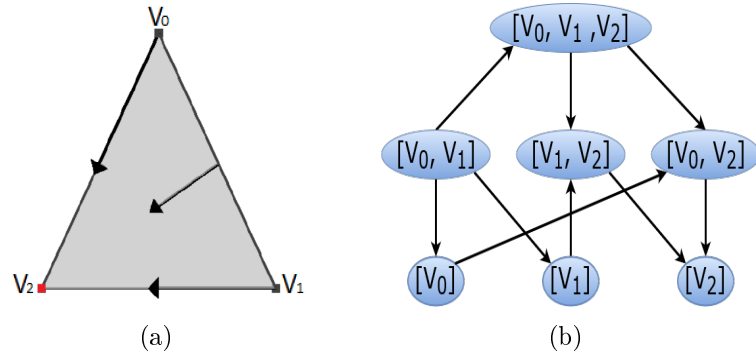


Figure 3.6 – Construction du diagramme de Hasse modifié.

de  $\beta^{(p+1)}$  à  $\alpha^{(p)}$ . Si  $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\} \in \mathcal{V}$ , c'est-à-dire que  $\alpha^{(p)}$  et  $\beta^{(p+1)}$  forment un vecteur, alors, nous inversons l'orientation de l'arête dans le diagramme de Hasse. Avec cette nouvelle règle, nous obtenons le diagramme de Hasse modifié. Voici un exemple, avec les Figures 3.5 et 3.6, qui montre les étapes de cette construction.

Ainsi, cette construction de diagramme de Hasse modifié encode l'information de tous les  $v$ -chemins possibles d'un champ vectoriel combinatoire sur un complexe simplicial. Donc, le théorème 3.10 est équivalent au prochain théorème 3.11.

**Théorème 3.11.** *Il n'y a pas de  $v$ -chemin fermé non trivial si et seulement s'il n'y a pas de chemin non trivial dans le diagramme de Hasse modifié.*

De plus, comme la fonction de Morse discrète sur les  $v$ -chemins est décroissante, nous pouvons traduire le dernier théorème 3.11, dans un contexte plus général, pour obtenir le théorème 3.12 qui est connu dans la littérature de la théorie des graphes.

**Théorème 3.12.** *Soit  $\mathcal{G}$  un graphe orienté. Alors, il existe une fonction à valeur réelle strictement décroissante le long des chemins orientés si et seulement s'il n'existe pas de cycle dans  $\mathcal{G}$ .*

Avec toutes ces équivalences entre les théorèmes, nous obtenons la démonstration du théorème 3.10. Ceci nous permet d'identifier l'existence d'une fonction de Morse discrète sur un champ vectoriel combinatoire quelconque car s'il y existe un  $v$ -chemin fermé non trivial, nous ne pouvons pas construire une suite de simplexes décroissante pour construire le  $v$ -chemin.

Dans la littérature, il existe encore d'autres résultats intéressants. Par exemple, il y a un lien à faire entre les simplexes critiques et la dimension des groupes homologiques de chaque dimension d'un complexe simplicial. En revanche, ce qui nous concerne pour les systèmes dynamiques combinatoires sont les idées suivantes. Tout d'abord, d'utiliser les complexes simpliciaux comme espace combinatoire. Ensuite, d'apparier les simplexes de dimension  $d$  avec les simplexes de dimension  $d + 1$  pour créer les vecteurs. Pour finir, les  $v$ -chemins nous permettent de construire une suite de simplexes qui suit la dynamique des vecteurs. Donc, dans le prochain chapitre, nous allons généraliser ces concepts pour les systèmes dynamiques combinatoires car nous nous intéressons à tous les types de champs vectoriels combinatoires et non seulement à un champ gradient qui est utilisé pour la théorie de Morse classique et discrète.

## 3.2 Des données au fonction de Morse discrète

Dans cette section, nous adaptons l'algorithme de Vanessa Robins, Peter John Wood, et Adrian P. Sheppard [RJWS10] qui permet d'étendre une fonction sur les sommets d'un complexe cubique à un champ vectoriel combinatoire gradient pour le complexe simplicial. Nous posons  $f : K_0 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction des valeurs sur les sommets. De plus, nous avons besoin que  $f$  soit injective. Si ce n'est pas le cas, nous appliquons une petite perturbation pour que la fonction  $f$  soit injective.

**Définition 3.13.** Soient  $K$  un complexe simplicial,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  et un simplexe  $\sigma \in K$ . Nous définissons l'étoile de  $\sigma$  par l'ensemble suivant :

$$\text{st}(\sigma) = \{\alpha \in K \mid \sigma \in \alpha\}$$

De plus, nous définissons l'étoile inférieure de  $\sigma$  en ajoutant la condition que  $f(\alpha) \leq f(\sigma)$  et nous la notons  $L(\sigma)$ .

La fonction  $f$  a seulement des valeurs sur les sommets. Construisons une fonction  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  qui possède une valeur sur tous les simplexes. Pour ce faire, nous posons la valeur d'un simplexe en prenant la valeur maximale de ses sommets. C'est-à-dire, soit  $\sigma \in K$ . Alors,  $g(\sigma) = \max_{k_0 \in \sigma} f(k_0)$ . Ainsi, pour cette fonction  $g$ , nous obtenons l'égalité sur l'étoile inférieure de  $\sigma \in K$  :  $L(\sigma) = \{\alpha \in K \mid x \in K_0 \text{ et } f(x) = \max_{y \in \alpha} f(y)\}$ .

**Lemme 3.14.** Soit  $K$  un complexe simplicial avec une fonction  $f : K_0 \rightarrow \mathbb{R}$  sur les sommets et  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous obtenons  $K = \cup_{x \in K_0} L(x)$ .

*Démonstration.* D'abord,  $K \supset \cap_{x \in K_0} L(x)$  est trivial par la définition de  $L(x)$ . Il reste à montrer l'inverse. Soit  $\sigma \in K$ . Alors,  $g(\sigma) = \max_{k_0 \in \sigma} f(k_0)$ . Donc, posons le sommet  $k_0^* = \operatorname{argmax}_{k_0 \in \sigma} f(k_0)$ . Ainsi,  $g(\sigma) = f(k_0^*)$ . De plus,  $L(k_0^*) = \{\alpha \in K \mid k_0^* \in \alpha \text{ et } f(\alpha) \leq f(k_0^*)\}$ . Mais, nous avons  $\sigma \in L(k_0^*)$ . Donc, pour tout  $\sigma \in K$ , il existe  $k_0^*$  tel que  $\sigma \in L(k_0^*)$ . Bref,  $K \subset \cup_{x \in K_0} L(x)$ .  $\square$

Ainsi, nous pouvons récupérer tous les simplexes en utilisant seulement l'étoile inférieure sur les sommets.

Maintenant, décrivons l'algorithme 2 qui permet de construire un champ vectoriel combinatoire à partir d'une fonction de valeur sur les sommets. Le résultat obtenu est trois listes A, B et C. La liste A contient les simplexes sources, la liste B contient les simplexes cibles et la liste C contient les simplexes critiques. De plus, le  $i$ ème élément de A et le  $i$ ème élément de B forme un vecteur dans  $V$ , c'est-à-dire que  $\{A[i] < B[i]\} \in V$  pour tout  $i$ . Donc, nous traitons chaque sommet dans l'ordre croissant. Nous apparions le sommet avec un 1-simplexe ayant la valeur minimum de  $g$  dans l'étoile inférieure du sommet. Alors, les autres 1-simplexes ne sont pas appariés. Donc, nous essayons de les appairer avec un autre simplexe de dimension supérieure. Ainsi, nous introduisons deux files de priorité nommées PQzero et PQone. La file PQzero contient tous les simplexes qui ne peuvent pas être appariés par ses cofaces. Dans le même ordre d'idée, la file PQone contient tous les simplexes qui peuvent être appariés par une seule de ses faces. De plus, les deux files sont en ordre décroissant avec les valeurs de  $g$ . Pour un simplexe, toutes les faces sont situées avant le simplexe lui-même. Donc, les autres 1-simplexes qui ne sont pas appariés avec le sommet se retrouvent dans PQone. Maintenant, passons et vidons les deux files de priorité PQone et PQzero.

D'abord pour les éléments qui se retrouvent dans la file PQone, soit le premier élément  $\alpha$  de PQone. D'abord, nous vérifions si nous pouvons appairer  $\alpha$  avec un autre simplexe. Si, c'est faux, nous l'ajoutons à PQzero. Sinon, nous ajoutons  $\alpha$  à la liste A et le seul élément qui s'apparie avec, appelé  $\text{pair}(\alpha)$ , à B. Il se peut que  $\text{pair}(\alpha)$  soit dans PQzero. Alors, nous l'enlevons de cette file. Ensuite, nous vérifions tous les simplexes qui ont comme face  $\alpha$  ou  $\text{pair}(\alpha)$  et que leur nombre de faces non appariées est un. Si c'est le cas, nous les ajoutons à PQone. Nous répétons ces étapes jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'éléments dans PQone.

Les éléments qui se retrouvent dans PQzero ne peuvent pas être appariés avec un autre simplexe. Alors, nous les mettons dans la liste C comme simplexe critique. De la même manière que plus haut, nous vérifions tous les simplexes qui ont comme face le simplexe critique et que leur nombre de faces non appariées est un. Si c'est le cas, nous les ajoutons à PQone. Nous répétons ces étapes pour vider la liste PQzero.

Après avoir vidé la file PQzero et que la file PQone est encore vide pour tous les sommets. Alors, l'algorithme se termine et nous obtenons trois listes A, B et C.

**Proposition 3.15.** *Pour chaque sommet  $x$ , tous les simplexes dans  $L(x)$  sont appariés dans  $V : A \rightarrow B$  ou un simplexe critique dans C.*

*Démonstration.* D'abord, tous les simplexes ajoutés dans PQone ou PQzero seront ajoutés dans les ensembles A, B ou C. Supposons le contraire. Soit  $\alpha^{(p)}$  un simplexe qui n'appartient pas à A, B ou C. Alors,  $\alpha^{(p)}$  n'est pas ajouté à PQone ou PQzero. Si  $\alpha$  n'est pas dans PQone ou PQzero implique que  $\text{numFacesNonAppariées}(\alpha) \geq 2$ . Donc, il existe  $\delta^{(p-1)} \in L(x)$  et  $\delta^{(p-1)} < \alpha$  qui n'est pas ajouté dans A, B ou C. Par les mêmes arguments, il existe aussi  $\delta^{(p-2)} \in L(x)$  et  $\delta^{(p-2)} < \delta^{(p-1)}$  qui n'est pas ajouté à A, B ou C. Ainsi, il existe  $\delta^{(1)}$  qui n'est pas dans A, B ou C. Par contre, tous les simplexes sont ajoutés à PQzero ou ils sont ajoutés dans B et nous obtenons la contradiction.  $\square$

Donc, l'algorithme 2 s'assure d'ajouter tous les simplexes du complexe simplicial  $K$  dans A, B ou C. Il reste à vérifier que les listes A, B et C forment un champ vectoriel combinatoire gradient.

**Théorème 3.16.** *L'algorithme 2 génère trois listes A, B et C qui permettent de construire un champ vectoriel combinatoire gradient.*

*Démonstration.* Nous allons construire une fonction  $m$  et montrons que  $m$  est une fonction de Morse discrète. Soit  $x$  un sommet et  $L(x)$  son étoile inférieure. Si  $L(x)$  a  $k = 1$



simplexe. Alors, le sommet  $x$  est critique. Sinon, si  $L(x)$  a  $k > 1$  simplexes, soit  $\delta$  le 1-simplexe le minimum de  $G(\alpha)$  et si  $L(x)$  a  $k > 2$ , soit  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-2}$  les simplexes restants dans  $L(x)$ . Rappelons l'ordre des simplexes de  $L(x)$  qui sont ajoutés dans V ou C. Nous avons que si  $V(\alpha) = \beta$ , alors,  $\beta$  est immédiatement précédé par  $\alpha$ . Donc, nous obtenons l'ordre suivant des simplexes de  $L(x)$  :

$$\delta, x, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_{k-2}}$$

Soit  $\epsilon = \min_{x \neq y} \{|g(x) - g(y)|\}$ . Comme  $K$  est un complexe simplicial fini. Alors, nous posons  $N = \max_{x \in K_0} \text{card}(L(x))$ . Définissons la fonction  $m$  :

$$\begin{aligned} m(\delta) &= g(x) - \frac{\epsilon}{N} \\ m(x) &= g(x) \\ m(\alpha_{j_i}) &= g(x) + \frac{i\epsilon}{N} \end{aligned}$$

Nous étendons  $m$  à tous les sommets  $x \in K_0$ . Il nous reste à montrer que  $m$  est une fonction de Morse discrète de la définition 3.1. D'abord, considérons une paire  $\{\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}\} \in V$ . Si  $p = 0$ , le résultat est trivial. Si  $p \geq 1$ , il existe un  $x \in K_0$  tel que  $\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)} \in L(x)$  et  $m(\beta) < m(\alpha)$ . Les autres faces de  $\beta$  sont insérées dans V ou C plutôt dans l'algorithme car pour apparier  $\alpha$  et  $\beta$  ensemble, il faut que  $\text{numFacesNonAppariées}(\beta) = 1$ . Alors,  $\alpha$  est la seule face de  $\beta$  avec une valeur de  $m(\alpha) \geq m(\beta)$ . Donc, toutes les paires  $\{\alpha < \beta\} \in V$  respectent la définition 3.1. Si  $\gamma \in C$  est un simplexe critique. Toutes les faces de  $\gamma$  sont ajoutées avant  $\gamma$  et tous les simplexes contenant  $\gamma$  comme face sont ajoutés après. Donc, pour tout  $\sigma < \gamma < \tau$ , nous avons  $m(\sigma) \leq m(\gamma) \leq m(\tau)$  qui respecte la définition 3.1. Ainsi,  $m$  est une fonction de Morse discrète et que les listes A, B et C forment un champ vectoriel combinatoire gradient.  $\square$

**Exemple 3.17.** *Appliquons l'algorithme 2 sur le tore de la Figure 3.7(a). D'abord, nous avons une représentation, dans  $\mathbb{R}^2$ , d'un tore. Il y a une relation d'équivalence entre les*

---

**Algorithme 2** Traiter les étoiles inférieures sur les sommets

---

**Entrée :** Une fonction  $f : K_0 \rightarrow \mathbb{R}$  sur les sommets.

**Sortie :** Trois listes  $A, B$  et  $C$ .

**Pour**  $x \in K_0$  **faire**

**Si**  $L(x) = \{x\}$  **Alors**

$x$  est un minimum local. Alors, ajouter  $x$  à  $C$ .

**Sinon**

$\delta :=$  un 1-simplexe dans  $L(x)$  tel que  $g(\delta)$  est minimum.

    Ajouter  $x$  à  $A$ .

    Ajouter  $\delta$  à  $B$ .

    Ajouter les autres 1-simplexes de  $L(x)$  à PQzero.

    Ajouter tous les simplexes  $\alpha \in L(x)$  à PQone tel que  $\alpha > \delta$  et  $\text{numFacesNonAppariées}(\alpha) = 1$ .

**Tant que** PQone  $\neq \emptyset$  ou PQzero  $\neq \emptyset$  **faire**

**Tant que** PQone  $\neq \emptyset$  **faire**

$\alpha := \text{PQone.popfront}$

**Si**  $\text{numFacesNonAppariées}(\alpha) = 0$  **Alors**

        Ajouter  $\alpha$  à PQzero.

**Sinon**

        Ajouter  $\alpha$  à  $A$ .

        Ajouter  $\text{pair}(\alpha)$  à  $B$ .

        Enlever  $\text{pair}(\alpha)$  de PQzero.

        Ajouter tous les simplexes  $\beta \in L(x)$  à PQone tel que  $(\beta > \alpha$  ou  $\beta > \text{pair}(\alpha))$  et  $\text{numFacesNonAppariées}(\beta) = 1$ .

**Fin Si**

**Fin Tant que**

**Si** PQzero  $\neq \emptyset$  **Alors**

$\gamma = \text{PQzero.popfront}$

    Ajouter  $\gamma$  à  $C$ .

    Ajouter tous les  $\alpha \in L(x)$  à PQone tel que  $\alpha > \gamma$  et  $\text{numFacesNonAppariées}(\alpha) = 1$ .

**Fin Si**

**Fin Tant que**

**Fin Si**

**Fin Pour**

---

arêtes opposées du carré. C'est-à-dire, soit un carré égal à  $[0, 1] \times [0, 1]$ . De plus, nous avons ajouté les relations suivantes :  $(x, 0) \sim (x, 1)$  pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $(0, y) \sim (1, y)$  pour tout  $y \in [0, 1]$ . De plus, soit une fonction  $f$  injective qui attribue des valeurs aux sommets.

D'abord, nous ordonnons les sommets en ordre croissant et regardons l'évolution des listes  $A, B$  et  $C$  après chaque traitement des sommets :

- Traitement du sommet 0 :  $A = \emptyset$ ,  $B = \emptyset$  et  $C = \{[0]\}$ .
- Traitement du sommet 10 :  $A = \{[10]\}$ ,  $B = \{[0, 10]\}$  et  $C = \{[0]\}$ .
- Traitement du sommet 20 :  $A = \{[10], [20]\}$ ,  $B = \{[0, 10], [10, 20]\}$  et  $C = \{[0]\}$ .
- Traitement du sommet 30 :  $A = \{[10], [20], [30]\}$ ,  $B = \{[0, 10], [10, 20], [10, 30]\}$  et  $C = \{[0]\}$ .
- Traitement du sommet 40 :  $A = \{[10], [20], [30], [40]\}$ ,  $B = \{[0, 10], [10, 20], [10, 30], [0, 40]\}$  et  $C = \{[0], [30, 40], [20, 40]\}$ .
- Traitement du sommet 50 :  $A = \{[10], [20], [30], [40], [50], [40, 50], [10, 50], [20, 50], [30, 50]\}$ ,  $B = \{[0, 10], [10, 20], [10, 30], [0, 40], [0, 50], [0, 40, 50], [0, 10, 50], [20, 40, 50], [10, 30, 50]\}$  et  $C = \{[0], [30, 40], [20, 40]\}$ .
- Traitement du sommet 60 :  $A = \{[10], [20], [30], [40], [50], [40, 50], [10, 50], [20, 50], [30, 50], [60], [10, 60], [20, 60], [40, 60], [30, 60]\}$ ,  $B = \{[0, 10], [10, 20], [10, 30], [0, 40], [0, 50], [0, 40, 50], [0, 10, 50], [20, 40, 50], [10, 30, 50], [0, 60], [0, 10, 60], [10, 20, 60], [20, 40, 60], [30, 40, 60]\}$  et  $C = \{[0], [30, 40], [20, 40]\}$ .
- Traitement du sommet 70 :  $A = \{[10], [20], [30], [40], [50], [40, 50], [10, 50], [20, 50], [30, 50], [60], [10, 60], [20, 60], [40, 60], [30, 60], [70], [40, 70], [30, 70], [10, 70], [20, 70]\}$ ,  $B = \{[0, 10], [10, 20], [10, 30], [0, 40], [0, 50], [0, 40, 50], [0, 10, 50], [20, 40, 50], [10, 30, 50], [0, 60], [0, 10, 60], [10, 20, 60], [20, 40, 60], [30, 40, 60], [0, 70], [0, 40, 70], [30, 40, 70], [10, 30, 70], [10, 20, 70]\}$  et  $C = \{[0], [30, 40], [20, 40]\}$ .
- Traitement du sommet 80 :  $A = \{[10], [20], [30], [40], [50], [40, 50], [10, 50], [20, 50],$

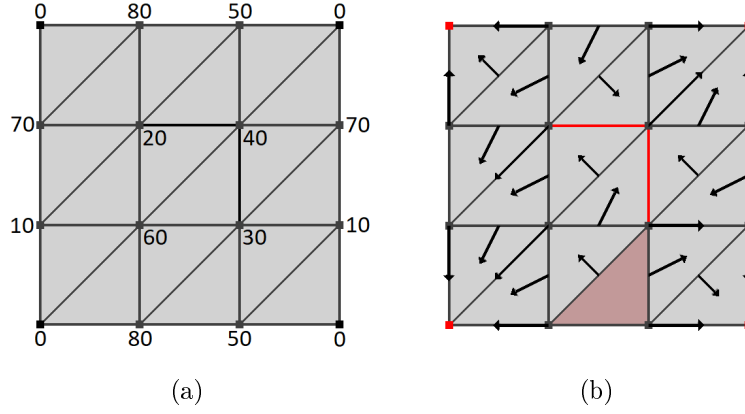


Figure 3.7 – Exemple sur un tore de l’algorithme 2

$[30, 50], [60], [10, 60], [20, 60], [40, 60], [30, 60], [70], [40, 70], [30, 70], [10, 70], [20, 70], [80], [70, 80], [60, 80], [20, 80], [30, 80], [50, 80]\}$ ,  $B = \{[0, 10], [10, 20], [10, 30], [0, 40], [0, 50], [0, 40, 50], [0, 10, 50], [20, 40, 50], [10, 30, 50], [0, 60], [0, 10, 60], [10, 20, 60], [20, 40, 60], [30, 40, 60], [0, 70], [0, 40, 70], [30, 40, 70], [10, 30, 70], [10, 20, 70], [0, 80], [0, 70, 80], [0, 60, 80], [20, 70, 80], [30, 60, 80], [20, 50, 80]\}$  et  $C = \{[0], [30, 40], [20, 40], [30, 50, 80]\}$ .

*Donc, nous obtenons un champ vectoriel combinatoire gradient présenté à la Figure 3.7(b).*

Bref, nous avons adapté une méthode [RJWS10] permettant de construire un champ vectoriel combinatoire gradient sur un complexe simplicial avec une fonction  $f$  définie seulement sur les sommets. De plus, nous utilisons une fonction  $g$  qui étend la fonction  $f$  à tous les simplexes, ce qui nous permet de définir les étoiles inférieures permettant de décomposer le complexe simplicial en sous-ensembles de simplexes. Pour finir, nous avons expliqué un algorithme et démontré sa validité. Il existe aussi d’autres algorithmes qui permettent de construire un champ vectoriel discret gradient avec d’autres méthodes [KKM05].

# CHAPITRE 4

## Les champs vectoriels combinatoires avec une application multivoque

Dans ce chapitre, nous généralisons l'idée de Forman, de la théorie de Morse discrète, d'apparier un  $n$ -simplexe avec un  $(n + 1)$ -simplexe comme source et destination d'un vecteur pour assigner une définition aux systèmes dynamiques combinatoires [KMW16]. Ensuite, nous construisons une application multivoque qui nous permettra de créer le dynamisme du système. De plus, nous nous intéressons à une suite de simplexes associée à l'application multivoque appelée une solution, plus précisément, aux solutions qui convergent ou divergent dans une zone du système dynamique combinatoire nommée un invariant. Par la suite, en ajoutant des conditions aux invariants, nous obtenons des invariants isolés et des invariants minimums. De plus, nous retrouvons ici une partie de mes contributions originales.

## 4.1 Les systèmes dynamiques combinatoires

**Définition 4.1.** Soit  $K$  un complexe simplicial géométrique. Alors,  $\mathcal{V} : K \rightarrow K$  est un système dynamique combinatoire si  $\mathcal{V}$  est une application partielle, c'est-à-dire que  $\text{Dom } \mathcal{V} \subset K$ , injective et les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout simplexe  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V}$ , soit que  $\mathcal{V}(\sigma) = \sigma$ , un point fixe, ou soit que  $\sigma$  est une face d'une dimension inférieure à  $\mathcal{V}(\sigma)$ .
2.  $\text{Dom } \mathcal{V} \cup \text{Im } \mathcal{V} = K$ .
3.  $\text{Dom } \mathcal{V} \cap \text{Im } \mathcal{V} = \text{Crit } \mathcal{V}$ , où  $\text{Crit } \mathcal{V}$  est l'ensemble des points fixes du système dynamique combinatoire. C'est équivalent aux points critiques dans le cas du champ vectoriel combinatoire de Forman.

Autrement dit, les systèmes dynamiques combinatoires ressemblent à la définition des champs vectoriels combinatoires de la théorie de Morse discrète. Par contre, nous ne nous intéressons pas seulement aux fonctions de Morse discrètes et il n'y a aucune valeur associée sur les simplexes. L'application partielle  $\mathcal{V}$  permet que tous les simplexes ne soient pas fixes pour que l'application soit bien définie et d'avoir certains simplexes comme source. La première condition nous indique que nous pouvons avoir des points fixes et les autres éléments dans le domaine de  $\mathcal{V}$  qui sont appariés avec un autre simplexe qui est une coface d'une dimension supérieure. Donc, cette condition reflète l'intuition des vecteurs de la théorie de Morse discrète sans avoir de valeur sur les simplexes. La deuxième condition permet que tous les simplexes du complexe simplicial soient une source, une cible ou les deux d'un vecteur. La troisième condition enlève le cas d'avoir un  $n$ -simplexe apparié avec un  $(n - 1)$ -simplexe et  $(n + 1)$ -simplexe, c'est-à-dire d'être la source et la cible de deux vecteurs différents. Alors, seulement les simplexes fixes sont dans l'intersection du domaine et de l'image de  $\mathcal{V}$ . Parfois, nous l'appelons aussi un champ vectoriel combinatoire. Donc, voir la Figure 4.1 pour un exemple de système dynamique

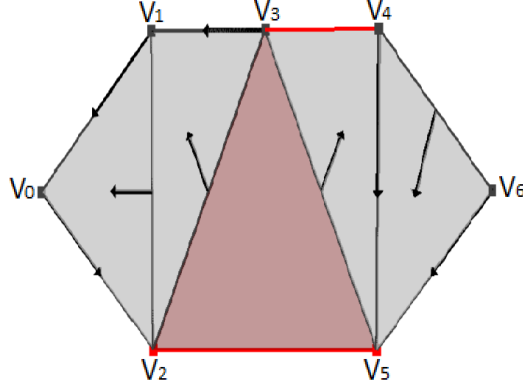


Figure 4.1 – Exemple d'un système combinatoire dynamique

combinatoire et les Figures 4.2 pour 4 contre-exemples qui ne respectent pas la définition 4.1.

**Remarque 4.2.** *Nous utilisons trois listes  $A$ ,  $B$  et  $C$  pour encoder l'information du système dynamique combinatoire dans une application. Nous posons  $A = \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ ,  $B = \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  et  $C = \text{Crit } \mathcal{V}$ . Ainsi, nous pouvons restreindre  $\mathcal{V} : A \cup C \rightarrow B \cup C$  où le  $i$ ème élément de la liste  $A$  et le  $i$ ème élément de la liste  $B$  sont reliés par un vecteur. Donc, il est important de garder un ordre fixe aux listes  $A$  et  $B$  pour reconstruire les vecteurs.*

Nous rappelons le calcul de l'adhérence et de la frontière d'un simplexe 2.9. Soit  $\sigma$  un simplexe. L'adhérence de  $\sigma$  ( $\text{Cl } \sigma$ ) est l'ensemble de toutes ses faces et la frontière de  $\sigma$  ( $\text{Bd } \sigma$ ) est l'ensemble de toutes ses faces propres.

**Définition 4.3.** *Un multi flot combinatoire associé à un système dynamique combinatoire  $\mathcal{V}$  est défini par une application multivoque  $\Pi_{\mathcal{V}} : K \rightarrow P(K)$  où  $P(K)$  est l'ensemble des*

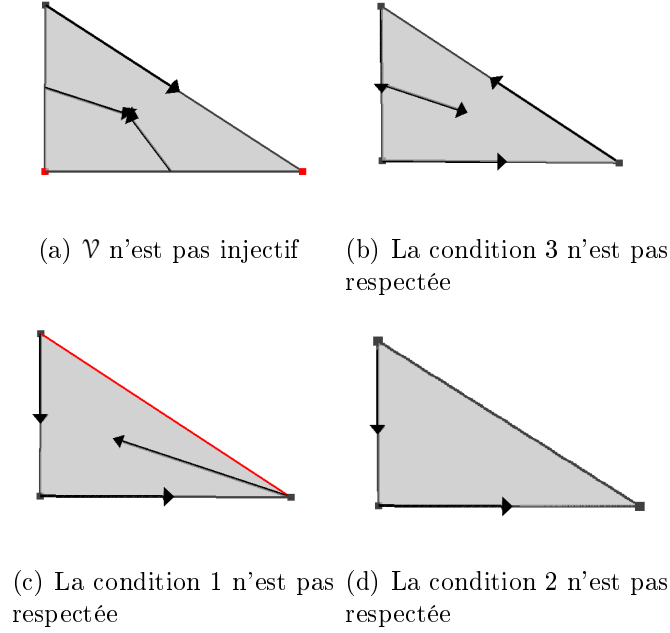


Figure 4.2 – Contre-exemples sur les systèmes dynamiques de la définition 4.1

parties de  $K$ .

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma) := \begin{cases} \text{Cl } \sigma & \text{Si } \sigma \in \text{Crit } \mathcal{V} \\ \text{Bd } \sigma \setminus \{\mathcal{V}^{-1}(\sigma)\} & \text{Si } \sigma \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V} \\ \{\mathcal{V}(\sigma)\} & \text{Si } \sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Nous définissons la préimage de  $\Pi_{\mathcal{V}}$  comme  $\sigma \in \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\tau)$  si et seulement si  $\tau \in \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma)$ . De plus, nous définissons  $\Pi_{\mathcal{V}}^k$  en appliquant une  $k$ -ième fois l'application multivoque  $\Pi_{\mathcal{V}}$  à l'ensemble des simplexes de l'itération précédente  $k - 1$ . Par exemple, si nous calculons  $\Pi_{\mathcal{V}}^2(\sigma)$ . D'abord, nous calculons  $\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma) = A$ . Pour ensuite, calculer  $\Pi_{\mathcal{V}}(A) = \Pi_{\mathcal{V}}^2(\sigma)$ .

**Exemple 4.4.** *Calculons certains simplexes de l'application multivoque  $\Pi_{\mathcal{V}}$  du système dynamique combinatoire de la Figure 4.1.*

Soit  $\sigma_1 = [V_1, V_2] \in \text{Dom } \mathcal{V}$ . Alors, le calcul de  $\Pi_{\mathcal{V}}$  est la cible du vecteur associé à  $\sigma_1$ . Ainsi,  $\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_1) = \{[V_0, V_1, V_2]\}$ .



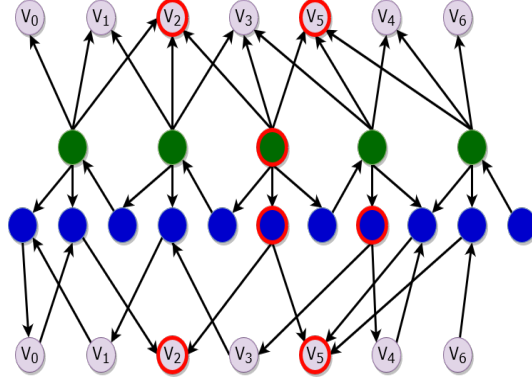


Figure 4.3 – Exemple d'un graphe orienté du système combinatoire dynamique 4.1.

Soit  $\sigma_2 = [V_1, V_2, V_3] \in \text{Im } \mathcal{V}$ . Alors, nous calculons la frontière de  $\sigma_2$  :  $\text{Bd } \sigma_2 = \{[V_1], [V_2], [V_3], [V_1, V_2], [V_2, V_3], [V_1, V_3]\}$ . Ensuite, nous enlevons  $\mathcal{V}^{-1}(\sigma_2) = [V_2, V_3]$ . Donc, nous obtenons le résultat  $\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_2) = \{[V_1], [V_2], [V_3], [V_1, V_2], [V_1, V_3]\}$ .

Soit  $\sigma_3 = [V_2, V_3, V_5] \in \text{Crit } \mathcal{V}$ . Alors, nous devons calculer l'adhérence de  $\sigma_3$  :  $\text{Cl } \sigma_3 = \{[V_2], [V_3], [V_5], [V_2, V_3], [V_2, V_5], [V_3, V_5], [V_2, V_3, V_5]\} = \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_3)$ .

À l'aide de l'application multivoque  $\Pi_{\mathcal{V}}$ , nous pouvons construire un graphe orienté. Par exemple, la Figure 4.3 est un graphe orienté de  $\Pi_{\mathcal{V}}$  du système dynamique combinatoire 4.1. Les points bleus sont les 2-simplexes, les points verts sont les 1-simplexes et il y a une copie des 0-simplexes pour faciliter la lecture du graphe. De plus, les nœuds, ayant un contour rouge, sont les simplexes critiques et ils ont une flèche qui pointe vers eux-mêmes. Elles ne sont pas affichées dans le graphe. De plus, nous restreignons la longueur des noms des 1-simplexes et 2-simplexes pour faciliter la lecture du graphe. Donc, nous pouvons utiliser les algorithmes de la théorie des graphes pour faire des calculs rapides et efficaces. Ceci serait aussi une autre méthode pour encoder un système dynamique combinatoire en utilisant la liste d'adjacence et la matrice d'adjacence. Par contre, vérifier qu'un simplexe est un élément du domaine, de l'image ou un simplexe critique à partir du graphe n'est pas trivial.

Maintenant, nous pouvons définir un chemin avec une suite de simplexes telle que le  $i$ ème simplexe et le prochain sont en relation par l'application de  $\Pi_{\mathcal{V}}$ . Ceci généralise le  $v$ -chemin de la théorie de Morse discrète. Avec la nouvelle idée de  $v$ -chemin, il sera possible de faire une suite de simplexes contenant des simplexes de plusieurs dimensions au lieu du  $v$ -chemin qui considère les simplexes de dimension  $p$  et  $p + 1$ . De plus, le  $v$ -chemin ne possède pas de point critique sauf à la fin du  $v$ -chemin. Ce qui nous permettra d'étudier les tendances et les prédictions du système.

**Définition 4.5.** *Une solution d'un multi flot combinatoire  $\Pi_{\mathcal{V}}$  d'un champ vectoriel combinatoire  $\mathcal{V}$  est une fonction  $\varrho : I \rightarrow K$  telle que  $I$  est un intervalle dans  $\mathbb{Z}$  et  $\varrho(i + 1) \in \Pi_{\mathcal{V}}(\varrho(i))$ , pour  $i \in I$ . De plus, nous disons que c'est une solution complète si  $I = \mathbb{Z}$ .*

Nous remarquons que le temps  $i \in I$  est discret.

**Exemple 4.6.** *Construisons des solutions de la Figure 4.1. Soit une solution  $\varrho_1 := [V_3, V_5] \rightarrow [V_3, V_4, V_5] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow [V_4] \rightarrow [V_4, V_5] \rightarrow [V_5]$  avec  $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Soit une solution complète  $\varrho_2 := \dots \rightarrow [V_2, V_3, V_5] \rightarrow [V_2, V_3, V_5] \rightarrow [V_2, V_3] \rightarrow [V_1, V_2, V_3] \rightarrow [V_1, V_2] \rightarrow [V_0, V_1, V_2] \rightarrow [V_0] \rightarrow [V_0, V_2] \rightarrow [V_2] \rightarrow [V_2] \rightarrow \dots$  avec  $I = \mathbb{Z}$ .*

Ainsi, une première question que nous pouvons nous poser est : quand existe-t-il une solution entre deux simplexes ? Les deux prochains lemmes nous aideront à répondre à cette question. Le premier est sur la non-existence d'une solution et le deuxième est sur l'existence d'une solution. Ce qui nous permettra d'avoir une meilleure compréhension des solutions possibles dans un système dynamique combinatoire.

**Lemme 4.7.** *Soit  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  avec  $\dim \sigma = d$ . Soit  $\tau \in K$ . Si la  $\dim \tau \geq d + 2$ , alors, il n'existe pas de solution partant de  $\sigma$  à  $\tau$ . Soit  $\sigma \in \text{Im } \mathcal{V}$  avec  $\dim \sigma = d$ . Soit  $\tau \in K$ . Si la  $\dim \tau \geq d + 1$ , alors, il n'existe pas de solution partant de  $\sigma$  à  $\tau$ .*

*Démonstration.* D'abord, nous allons faire quelques calculs sur la dimension des simplexes en appliquant l'application multivoque  $\Pi_{\mathcal{V}}$ . Soit  $\sigma \in K$  de dimension  $d$  et  $\tau \in \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma)$ . Nous obtenons les trois cas suivants :

- Si  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\dim \sigma = \dim \tau + 1$  et  $\tau \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ .
- Si  $\sigma \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\dim \sigma > \dim \tau$ .
- Si  $\sigma \in \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\dim \sigma \geq \dim \tau$  et l'égalité est obtenue seulement pour  $\sigma = \tau$ .

Donc,  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  est le seul type de simplexe qui permet d'augmenter de dimension dans une solution. Alors, il n'existe pas de solutions entre les simplexes de dimension  $d + 2$  et plus et  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ . Si  $\sigma \in \text{Im } \mathcal{V}$ , alors, il peut exister un  $\tau \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V} \cap \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma)$  de dimension  $d - 1$ . Par le même argument que précédemment, nous avons qu'il n'existe pas de solution entre les simplexes de dimension  $d + 1$  et plus et  $\sigma \in \text{Im } \mathcal{V}$ .  $\square$

Donc, le résultat précédent indique la non-existence d'une solution entre deux simplexes en utilisant seulement la dimension du simplexe de départ et d'arrivée. Par contre, il serait convenable d'avoir un critère combinatoire qui identifie s'il y existe ou pas une solution entre deux simplexes.

**Lemme 4.8.** *Soit  $\sigma, \tau \in K$ . Il existe une solution entre  $\sigma$  et  $\tau$  si et seulement s'il existe un  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  tel que  $\tau \in \Pi_{\mathcal{V}}^k(\sigma)$ .*

Ce lemme est simple à démontrer. En revanche, si le complexe simplicial  $K$  est fini, alors, il existe un  $k$  tel que  $\cup_{i=1}^k \Pi_{\mathcal{V}}^i(\sigma) = \cup_{i=1}^{k+1} \Pi_{\mathcal{V}}^i(\sigma)$ . Ainsi, la suite  $\cup_{i=1}^k \Pi_{\mathcal{V}}^i(\sigma)$  devient constante pour tout  $j > k$ . Donc, nous obtenons un critère d'arrêt, s'il n'y a pas de solution entre  $\sigma$  à  $\tau$ . Nous obtenons l'algorithme 3.

Dans le même ordre d'idée, pour la préimage de  $\mathcal{V}$ , il y a des conditions nécessaires pour qu'un simplexe soit la préimage de l'application multivoque  $\Pi_{\mathcal{V}}$ .

**Proposition 4.9.** *Soit  $\sigma \in K$  de  $\dim \sigma = d$ .*

---

**Algorithme 3** Existence d'une solution entre deux simplexes.

---

**Entrée :** Deux simplexes  $\sigma$  et  $\tau$  dans  $K$  et  $K$  complexe simplicial fini.

**Sortie :** Vérifie l'existence d'un chemin allant de  $\sigma$  à  $\tau$ .

```

Si  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V}$  Alors
  Si  $\dim \sigma < \dim \tau + 2$  Alors
    Retourne Faux
  Fin Si
Sinon Si  $\dim \sigma < \dim \tau + 1$  Alors
  Retourne Faux
Fin Si
Trouver  $\leftarrow$  faux,  $S_0 = \{\sigma\}$ 
Répéter
   $S_{j+1} \leftarrow S_j \cup \Pi_{\mathcal{V}}(S_j)$ 
  Si  $\sigma \in S_{j+1}$  Alors
    Trouver  $\leftarrow$  Vrai
  Fin Si
Jusqu'à  $S_j = S_{j+1}$  ou Trouver
Retourne Trouver

```

---

- Si  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors, il n'existe pas  $\tau \in \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma)$  tel que  $\tau \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ ,  $\tau \in \text{Im } \mathcal{V}$  de  $\dim \tau < d + 1$  ou  $\tau = \mathcal{V}(\sigma)$ .
- Si  $\sigma \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors, il n'existe pas de  $\tau \in \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma)$  tel que  $\tau \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  sauf pour  $\tau = \mathcal{V}^{-1}(\sigma)$  ou  $\tau \in \text{Im } \mathcal{V}$  de  $\dim \tau < d + 1$ .
- Si  $\sigma \in \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors, il n'existe pas de  $\tau \in \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma)$  tel que  $\tau \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  ou  $\text{Im } \mathcal{V}$  de  $\dim \tau < d + 1$  sauf pour  $\sigma = \tau$ .

De plus, soit  $\tau \in \text{Im } \mathcal{V}$ . Si  $\sigma < \tau$  et  $\sigma \neq \mathcal{V}^{-1}(\tau)$ , alors  $\tau \in \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma)$ .

Pour le démontrer, nous utilisons le lemme 4.7 en vérifiant les solutions possibles partant de  $\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma)$  à  $\sigma$  et en appliquant la définition 4.3 de l'application multivoque  $\Pi_{\mathcal{V}}$ . Par contre, si le complexe simplicial  $K$  est infini, il se peut qu'il existe un  $\sigma$  tel que  $\text{card}(\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma)) = \infty$ . Ainsi, dans le cas fini, nous obtenons l'algorithme 4 pour calculer la préimage d'un simplexe. Voir la définition 4.17 pour comprendre la signification de  $\sigma^-$  et  $\sigma^+$ .

---

**Algorithme 4** Calculer la préimage de  $\sigma$ .

---

**Entrée :** Un simplexe  $\sigma \in K$ .**Sortie :**  $E$  est la préimage de  $\sigma$ .**Si**  $\sigma \in \text{Im } \mathcal{V}$  **Alors**Ajouter  $\sigma^-$  à  $E$ .**Fin Si****Pour tout**  $\tau \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  **faire****Si**  $\sigma \in \tau$  **Alors****Si**  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V}$  **et**  $\tau \neq \sigma_+$  **Alors**Ajouter  $\tau$  à  $E$ .**Fin Si****Fin Si****Fin Pour****Pour tout**  $\tau \in \text{Crit } \mathcal{V}$  **faire****Si**  $\sigma < \tau$  **Alors**Ajouter  $\tau$  à  $E$ .**Fin Si****Fin Pour****Retourne**  $E$ 

---

## 4.2 Les invariants

Maintenant, nous aimerons étudier les systèmes dynamiques combinatoires en profondeur. Plus précisément, nous voulons connaître les secteurs intéressants du système dynamique. Mais, quel type de zone pourrions-nous étudier ? L'approche que nous allons prendre est d'étudier les régions où il existe des solutions complètes qui restent complètement dans la région pour un temps  $i$  qui tend à  $-\infty$ , à  $+\infty$ , ou les deux. C'est une manière de mieux comprendre les tendances et les comportements des solutions des systèmes dynamiques combinatoires.

**Définition 4.10.** Soit  $\mathcal{V}$  un champ vectoriel combinatoire sur un complexe simplicial  $K$ . Alors, un ensemble  $S \subseteq K$  est un invariant associé à un multi flot combinatoire  $\Pi_{\mathcal{V}}$ , si pour chaque simplexe  $\sigma \in S$ , il existe une solution complète  $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow K$  passant par  $\sigma$  telle que  $\text{Im } \varrho$  est contenue dans  $S$ . De la même manière, nous définissons les invariants

positifs avec des solutions telles que  $I = \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et les invariants négatifs avec des solutions telles que  $I = \mathbb{Z}_{\leq 0}$ .

**Exemple 4.11.** Retournons à la Figure 4.1 et trouvons des invariants et un contre-exemple. D'abord, nous remarquons qu'un seul point fixe est un invariant comme  $\sigma = [V_2, V_3, V_5]$  avec une solution complète constante en  $\sigma$ . Soit  $S_1 = \{[V_5], [V_2, V_5], [V_2, V_3, V_5], [V_3, V_5], [V_3, V_4, V_5], [V_3, V_4]\}$ . Alors, nous avons deux solutions complètes  $\varrho_1 = \dots \rightarrow [V_2, V_3, V_5] \rightarrow [V_2, V_3, V_5] \rightarrow [V_3, V_5] \rightarrow [V_3, V_4, V_5] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow \dots$  et  $\varrho_2 = \dots \rightarrow [V_2, V_5] \rightarrow [V_2, V_5] \rightarrow [V_5] \rightarrow [V_5] \rightarrow [V_5] \rightarrow \dots$  passant par tous les simplexes de  $S_1$ . Donc, nous avons deux solutions complètes telles que  $\text{Im } \varrho_1 \subset S_1$  et  $\text{Im } \varrho_2 \subset S_1$ . Ainsi,  $S_1$  est un invariant. Soit  $S_2 = \{[V_0], [V_1], [V_2], [V_1, V_2], [V_0, V_2], [V_0, V_1, V_2]\}$ . Alors, nous avons que  $\Pi_V([V_1]) = [V_0, V_1] \notin S_2$  et  $\text{card}(\Pi_V([V_1])) = 1$ . Donc, il n'existe pas de solutions complètes passant par  $[V_1]$ . Ainsi,  $S_2$  n'est pas un invariant.

**Remarque 4.12.** L'image d'une solution complète est toujours un invariant.

Voici un peu de notation pour les invariants. Soit  $A \subset K$ . Alors, nous notons :

- $\text{Inv}(A) = \{\sigma \in A \mid \text{il existe une solution complète passant par } \sigma\}$ .
- $\text{Inv}^+(A) = \{\sigma \in A \mid \text{il existe une solution avec } I = \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ passant par } \sigma\}$ .
- $\text{Inv}^-(A) = \{\sigma \in A \mid \text{il existe une solution avec } I = \mathbb{Z}_{\leq 0} \text{ passant par } \sigma\}$ .

Nous remarquons que  $\text{Inv}(A) = \text{Inv}^+(A) \cap \text{Inv}^-(A)$  car nous pouvons concaténer les solutions, pour un  $\sigma \in \text{Inv}^+(A) \cap \text{Inv}^-(A)$ , pour  $I_+ = \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $I_- = \mathbb{Z}_{\leq 0}$  pour obtenir une solution complète avec  $I = I^+ \cup I^-$ . C'est aussi vrai pour  $\text{Inv}(A) \subset \text{Inv}^+(A) \cup \text{Inv}^-(A)$ .

Dans un autre ordre d'idée, avec l'exemple 4.11, nous remarquons que nous pouvons vérifier si un ensemble est un invariant ou non avec l'image ou la préimage de  $\Pi_V$  d'un simplexe. Le prochain lemme permettra de construire un critère pour vérifier si un ensemble est un invariant.

**Lemme 4.13.** Soit  $N \subset K$  un ensemble fini.  $N$  est un invariant si et seulement si pour

tous  $\sigma \in N$ ,  $\text{card}(\Pi_V(\sigma) \cap N) \geq 1$  et  $\text{card}(\Pi_V^{-1}(\sigma) \cap N) \geq 1$ .

*Démonstration.* Supposons que  $N$  est un invariant. Soit  $\sigma \in N$ . Alors, il existe une solution complète  $\varrho$  où  $\text{Im } \varrho \subset N$  et, sans perte de généralité, nous supposons que  $\varrho(0) = \sigma$ . Ceci implique que  $\varrho(1) \in N \cap \Pi_V(\sigma)$  et  $\varrho(-1) \in N \cap \Pi_V^{-1}(\sigma)$ . Donc, la  $\text{card}(\Pi_V(\sigma) \cap N) \geq 1$  et la  $\text{card}(\Pi_V(\sigma)^{-1} \cap N) \geq 1$  pour tout  $\sigma \in N$ .

Supposons l'inverse que pour tout  $\sigma \in N$ ,  $\text{card}(\Pi_V(\sigma) \cap N) \geq 1$  et  $\text{card}(\Pi_V^{-1}(\sigma) \cap N) \geq 1$ . Soit  $\sigma_0 \in N$ . Alors, il existe  $\sigma_{-1} \in \Pi_V^{-1}(\sigma_0) \cap N$  et  $\sigma_1 \in \Pi_V(\sigma_0) \cap N$ . Par les mêmes arguments, nous les appliquons à  $\sigma_{-1}$  et à  $\sigma_1$  pour obtenir  $\sigma_{-2}$  et  $\sigma_2$ . Par induction, nous avons  $\sigma_j$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  tel que  $\sigma_j \in \Pi_V(\sigma_{j-1})$  et  $\sigma_j \in \Pi_V^{-1}(\sigma_{j+1})$ . Donc, nous construisons une solution complète  $\varrho$  où  $\varrho(j) = \sigma_j$  pour  $j \in \mathbb{Z}$ . Aussi, nous avons  $\text{Im } \varrho \subset N$ . Ainsi, nous avons une solution complète passant par  $\sigma$  et contenu dans  $N$  pour tout  $\sigma \in N$ . En somme,  $N$  est un invariant.

□

Avec ce lemme, nous pouvons trouver les simplexes qui ne respectent pas le lemme 4.13 et les enlever de l'ensemble en question. Par contre, il faut faire attention car nous devons recommencer la vérification de l'invariant du début à chaque fois que nous enlevons un simplexe. Ceci est dû au fait qu'il est possible d'avoir des simplexes qui ne respectent plus le lemme en enlevant un ou plusieurs simplexes. Donc, le prochain théorème est une manière d'enlever systématiquement des simplexes jusqu'à obtenir un invariant de l'ensemble de départ.

**Théorème 4.14.** *Soit  $N$  un sous-ensemble fini du complexe simplicial  $K$  avec  $\Pi_V$ . Nous construisons une suite des sous-ensembles  $S_j$ , pour  $j = 0, 1, 2, \dots$  de  $N$  par induction :*

$$S_0 = N$$

$$S_{j+1} = \Pi_V(S_j) \cap S_j \cap \Pi_V^{-1}(S_j)$$

Alors, il existe un  $j_0 \in \mathbb{N}$  tel que la suite  $S_j$  devient constante, c'est-à-dire,  $S_j = S_{j_0}$  pour tout  $j \geq j_0$ . De plus,  $S_{j_0} = \text{Inv}(N)$ .

La prochaine démonstration est fortement inspirée de la démonstration [KMM04, Théorème 10.83, p.348]. Nous la gardons dans ce mémoire pour qu'il soit complet.

*Démonstration.* Montrons que la suite  $S_j$  est constante pour un assez grand  $j$ .

La suite  $S_j$  est décroissante car c'est une suite d'intersections d'ensembles. Alors,  $S_{j+1} \subset S_j$  pour tout  $j$ . Comme  $S_0$  est fini, il existe un  $j_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $S_j = S_{j_0} \forall j \geq j_0$ . Donc, la suite  $S_j$  devient constante.

Montrons que  $S_{j_0} \subset \text{Inv}(N)$ . Tout d'abord, nous remarquons que  $S_{j_0+1} = S_{j_0} = \Pi_V(S_{j_0}) \cap S_{j_0} \cap \Pi_V^{-1}(S_{j_0})$ . Pour tout  $\sigma \in S_{j_0}$ , ils existent  $\alpha \in S_{j_0}$  et  $\beta \in S_{j_0}$  tels que  $\sigma \in \Pi_V(\alpha)$  et  $\beta \in \Pi_V(\sigma)$ . Les mêmes arguments sont applicables à  $\alpha$  et  $\beta$ . Donc, il existe une solution complète  $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow K$  passant par  $\sigma$  telle que  $\varrho(0) = \sigma, \varrho(-1) = \alpha$  et  $\varrho(1) = \beta$  et nous appliquons l'induction sur  $n = 1, 2, 3, \dots$  et  $n = -1, -2, -3, \dots$  pour obtenir le reste de la solution complète. Comme  $S_{j_0} \subset N$ , l'image de la solution  $\varrho$  est contenue dans  $N$ . Nous avons choisi  $\sigma$  de façon arbitraire dans  $S_{j_0}$ , alors  $S_{j_0} = \text{Inv}(S_{j_0}) \subset \text{Inv}(N)$ .

Montrons que  $S_{j_0} \supset \text{Inv}(N)$ . Nous remarquons que  $S_{j_0} = \bigcap_{k=0}^{j_0} S_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$ . Alors, par induction, il est suffisant de montrer que  $\text{Inv}(N) \subset S_k$  pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Par définition,  $\text{Inv}(N) \subset N = S_0$ . Soit  $K \geq 0$ , supposons que c'est vrai pour  $\text{Inv}(N) \subset S_k$  et montrons le pour  $k+1$ . Pour tout  $\sigma \in \text{Inv}(N)$ , il existe une solution complète  $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Inv}(N)$  passant par  $\sigma$  sous  $\Pi_V$ . Posons  $\sigma_n = \varrho(n)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Par l'hypothèse d'induction,  $\sigma_n \in S_k$  pour tout  $n$ . Nous avons  $\sigma = \sigma_0 \in \Pi_V(\sigma_{-1})$  et  $\sigma_1 \in \Pi_V(\sigma)$ . La dernière égalité est équivalente à  $\sigma \in \Pi_V^{-1}(\sigma_1)$ . Nous obtenons  $\sigma \in S_k \cap \Pi_V(\sigma_{-1}) \cap \Pi_V^{-1}(\sigma_1) \subset S_K \cap \Pi_V(S_K) \cap \Pi_V^{-1}(S_k) = S_{k+1}$ . Ainsi,  $\sigma \in S_{k+1}$ . Alors,  $\text{Inv}(N) \subset S_{k+1}$ . Donc, nous parvenons au résultat que  $\text{Inv}(N) = S_k$ .



□

Donc, il est simple de créer l'algorithme 5 :

---

**Algorithme 5** Calcul Invariant

---

**Entrée :**  $N$  un sous-ensemble de  $K$ .

**Sortie :**  $I$  est un invariant de  $N$ .

$S_0 \leftarrow N$

**Répéter**

$S_{j+1} \leftarrow \Pi_V(S_j) \cap S_j \cap \Pi_V^{-1}(S_j)$

**Jusqu'à**  $S_j = S_{j+1}$

$I \leftarrow S_j$

**Retourne**  $I$

---

De plus, si l'algorithme 5 ne fait qu'une itération, l'ensemble de départ était un invariant.

Maintenant, nous allons ajouter deux conditions supplémentaires sur les invariants pour obtenir un nouvel objet permettant de définir la décomposition de Morse plus tard.

**Définition 4.15.** *Soit  $\mathcal{V}$  un champ vectoriel combinatoire sur un complexe simplicial  $K$  et  $S \subset K$  un ensemble invariant associé au multi flot combinatoire  $\Pi_V$ . Définissons l'ensemble des sorties de  $S$  par :*

$$\text{Ex } S := \text{Cl } S \setminus S.$$

*Alors,  $S$  est un invariant isolé si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *L'ensemble des sorties  $\text{Ex } S$  est fermé dans  $K$ , c'est-à-dire que  $\text{Cl } \text{Ex } S = \text{Ex } S$ .*
2. *Il n'existe pas de solutions  $\varrho : [-1, 1] \cap \mathbb{Z} \rightarrow K$  de  $\Pi_V$  tel que  $\varrho(-1) \in S$ ,  $\varrho(1) \in S$  et  $\varrho(0) \in \text{Ex } S$ .*

Cette nouvelle définition est une adaptation des blocs isolants du cas continu dans un point de vue des systèmes dynamiques combinatoires. La première condition est semblable au cas continu d'avoir l'ensemble des sorties fermées. La deuxième condition signifie que

nous ne voulons pas avoir des solutions tangentes à l'intérieur d'un invariant isolé, c'est-à-dire que nous ne voulons pas en un temps  $t$  être dans  $\text{Ex } S$  et que les simplexes aux temps  $t - 1$  et  $t + 1$  dans l'invariant isolé  $S$ .

**Exemple 4.16.** *Vérifions des invariants isolés de la Figure 4.1. Soit  $S_1 = \{[V_2, V_3, V_5], [V_2, V_5], [V_2], [V_5]\}$  un invariant. Alors,  $\text{Ex } S_1 = \{[V_2, V_3], [V_3, V_5], [V_3]\}$  et  $\text{Cl Ex } S_1 = \{[V_2, V_3], [V_3, V_5], [V_3], [V_5], [V_2]\}$ . Nous obtenons  $\text{Ex } S_1 \neq \text{Cl Ex } S_1$ . Donc,  $S_1$  n'est pas un invariant isolé.*

*Soit  $S_2 = \{[V_4], [V_5], [V_3, V_4], [V_4, V_5]\}$  un invariant. Alors,  $\text{Ex } S_2 = \{[V_3]\}$  et  $\text{Cl Ex } S_2 = \{[V_3]\} = \text{Ex } S_2$ . Donc, la première condition est satisfaite. De plus, il n'existe pas de solution complète  $\varrho$  telle que  $\varrho(-1) \in S_2, \varrho(1) \in S_2$  et  $\varrho(0) \in \text{Ex } S_2$  car  $\Pi_{\mathcal{V}}([V_3]) = [V_1, V_3] \notin S_2$ . Ainsi,  $S_2$  est un invariant isolé.*

Avec la définition 4.15, trouver des invariants isolés n'est pas toujours évident car il est difficile de vérifier la deuxième condition. Alors, nous allons définir de nouveaux simplexes permettant d'avoir une approche combinatoire sans utiliser la notion des solutions.

**Définition 4.17.** *Soient  $\mathcal{V} : K \rightarrow K$  un système dynamique combinatoire et  $\sigma \in K$ . Définissons les simplexes suivants :*

$$\sigma^+ := \begin{cases} \mathcal{V}(\sigma) & \text{Si } \sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \\ \sigma & \text{Sinon} \end{cases} \quad \sigma^- := \begin{cases} \sigma & \text{Si } \sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \\ \mathcal{V}^{-1}(\sigma) & \text{Sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

**Exemple 4.18.** *À la Figure 4.1, calculons  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  de quelques simplexes. Soit  $\sigma_1 = [V_1] \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ . Alors,  $\sigma_1^- = [V_1]$  et  $\sigma_1^+ = [V_0, V_1]$ . Soit  $\sigma_2 = [V_3, V_4, V_5] \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ . Alors,  $\sigma_2^- = [V_3, V_5]$  et  $\sigma_2^+ = [V_3, V_4, V_5]$ . Soit  $\sigma_3 = [V_2, V_5] \in \text{Crit } \mathcal{V}$ . Alors,  $\sigma_3^- = [V_2, V_5]$  et  $\sigma_3^+ = [V_2, V_5]$ .*

Le simplexe  $\sigma^+$  représente la cible d'un vecteur et le simplexe  $\sigma^-$  représente la source d'un vecteur associé à  $\sigma$ . Donc, si  $\sigma$  est la source ou la destination, selon le cas,  $\sigma^+$  ou  $\sigma^-$  est égale à  $\sigma$ . Ainsi, nous obtenons le résultat suivant.

**Lemme 4.19.** *Soit  $\mathcal{V}$  un champ vectoriel combinatoire sur un complexe simplicial  $K$ . Alors, pour un simplexe  $\sigma \in K$ , nous avons  $\sigma^- \subset \sigma \subset \sigma^+$  et au moins une de ces inclusions est une égalité.*

Les trois prochaines démonstrations sont semblables à celles de l'article [KMW16]. Par contre, nous les conservons pour avoir un mémoire complet.

*Démonstration.* Si  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma^+ = \mathcal{V}(\sigma)$ . Mais, par la définition 4.1 de  $\mathcal{V}$ , nous obtenons que  $\mathcal{V}(\sigma) = \sigma$  ou  $\sigma$  est une coface de  $\mathcal{V}(\sigma)$  ce qui implique que  $\sigma \subseteq \mathcal{V}(\sigma)$ . De plus, nous avons  $\sigma^- = \sigma$ . Ainsi, nous obtenons  $\sigma^- = \sigma \subseteq \sigma^+$ .

Si  $\sigma \notin \text{Dom } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma^+ = \sigma$  et  $\sigma^- = \mathcal{V}^{-1}(\sigma)$ . Mais, par la définition 4.1 de  $\mathcal{V}$ , nous avons  $\mathcal{V}^{-1}(\sigma) = \sigma$  ou  $\mathcal{V}^{-1}$  est une coface de  $\sigma$ , ce qui implique que  $\mathcal{V}^{-1}(\sigma) = \sigma^- \subseteq \sigma = \sigma^+$ . Donc, nous obtenons au moins une égalité dans les deux cas.  $\square$

Dans le cas d'un point fixe, nous obtenons les deux égalités  $\sigma^- = \sigma = \sigma^+$  pour les inclusions. Maintenant, appliquons la définition de  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  pour faire des liens avec les invariants isolés.

**Lemme 4.20.** *Soit  $\mathcal{V}$  un champ vectoriel combinatoire sur un complexe simplicial  $K$  et un invariant isolé  $S$  associé à un multi flot combinatoire  $\Pi_{\mathcal{V}}$ . Alors, pour tous les simplexes  $\sigma \in K$ , nous avons que  $\sigma^+ \in S$  si et seulement si  $\sigma^- \in S$ .*

En d'autres mots, il y a deux possibilités.  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  sont à l'intérieur ou à l'extérieur de l'invariant isolé  $S$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, si  $\sigma \in \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma = \sigma^+ = \sigma^-$ . Donc,  $\sigma^+ \in S$  et  $\sigma^- \in S$ .

Supposons que  $\sigma \notin \text{Crit } \mathcal{V}$ . Alors, nous avons  $\sigma^+ \neq \sigma^-$  par le lemme 4.20. De plus, par la définition 4.17, nous obtenons que  $\mathcal{V}(\sigma^-) = \sigma^+$ . Soit  $\sigma^- \in S$ .  $S$  est un invariant.

Alors, il existe une solution complète  $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow S$  telle que  $\sigma^- = \varrho(0)$ . Par le multi flot combinatoire  $\Pi_{\mathcal{V}}$ , nous obtenons  $\varrho(1) \in \Pi_{\mathcal{V}}(\varrho(0)) = \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma^-)$ . Si  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma^- = \sigma$  et  $\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma^-) = \{\mathcal{V}(\sigma^-)\} = \sigma^+$ . Sinon,  $\sigma \in \text{Im } \mathcal{V}$ . Alors,  $\sigma^- = \mathcal{V}^{-1}(\sigma) \in \text{Dom } \mathcal{V}$ . Donc,  $\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma^-) = \Pi_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}^{-1}(\sigma)) = \sigma = \sigma^+$ . Ainsi,  $\sigma^+ = \varrho(1) \in S$ . De l'autre côté, soit  $\sigma^+ \in S$ . De la même manière,  $S$  est un invariant. Alors, il existe une solution complète  $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow S$  telle que  $\sigma^+ = \varrho(0)$ . Soit  $\tau = \varrho(-1)$ . Nous obtenons  $\sigma^+ = \varrho(0) \in \Pi_{\mathcal{V}}(\varrho(-1)) = \Pi_{\mathcal{V}}(\tau)$ . Nous devons vérifier deux cas.

Dans le premier cas, si  $\tau \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\Pi_{\mathcal{V}}(\tau) = \{\mathcal{V}(\tau)\}$  et  $\sigma^+ = \mathcal{V}(\tau)$ . Donc,  $\sigma^- = \tau \in S$ .

Dans le deuxième cas, soit  $\tau \in \text{Im } \mathcal{V}$ . D'abord, si  $\sigma \notin \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma^+ \notin \text{Crit } \mathcal{V}$ . Donc,  $\sigma^+$  est une coface de  $\tau$ . De plus, si  $\sigma^- = \mathcal{V}^{-1}(\sigma^+)$ , alors,  $\sigma^-$  est une coface de  $\sigma^+$  de même pour  $\tau$ . Ainsi,  $\sigma^- \in \Pi_{\mathcal{V}}(\tau)$  car les deux images possibles du multi flot combinatoire contiennent toutes ses faces.

Nous construisons une solution  $\varrho : [-1, 1] \cap \mathbb{Z} \rightarrow K$ , en posant  $\varrho(-1) := \tau$ ,  $\varrho(0) := \sigma^-$  et  $\varrho(1) := \sigma^+ \in S$ . Comme  $S$  est un invariant isolé et  $\sigma^-$  est une coface de  $\sigma^+$ . Par la définition 4.15,  $\sigma^- \in S$  car la deuxième condition d'un invariant isolé indique qu'il n'existe pas de solution  $\varrho : [-1, 1] \cap \mathbb{Z} \rightarrow K$  telle que  $\varrho(-1) \in S$ ,  $\varrho(1) \in S$  et  $\varrho(0) \in \text{Ex } S$ .

□

À l'aide du lemme précédent, nous pouvons alléger la définition d'invariant isolé (plus précisément la deuxième condition) pour faciliter la vérification d'invariant isolé.

**Proposition 4.21.** *Un invariant  $S$  est un invariant isolé s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

1. *L'ensemble des sorties  $\text{Ex } S$  est fermé dans le complexe simplicial  $K$ .*
2. *Pour tous simplexes  $\sigma \in K$ , nous avons  $\sigma^- \in S$  si et seulement si  $\sigma^+ \in S$ .*

*Démonstration.* Ce qu'il faut montrer est pour tout simplexe  $\sigma \in K$ , nous avons que  $\sigma^- \in S$  si et seulement si  $\sigma^+ \in S$ . Alors, il n'existe pas de solution  $\varrho : [-1, 1] \cap \mathbb{Z} \rightarrow K$  de  $\Pi_{\mathcal{V}}$  tel que  $\varrho(-1) \in S$ ,  $\varrho(1) \in S$  et  $\varrho(0) \in \text{Ex } S$ .

Par contradiction, supposons qu'il existe une telle solution  $\varrho$  comme indiqué ci-dessus. Nous avons trois cas à vérifier.

Si  $\varrho(0) \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma^+ = \varrho(1) \in S$  et  $\sigma^- = \varrho(0) \in \text{Ex } S$ . Nous obtenons une contradiction avec  $\sigma^- \in S$  si et seulement si  $\sigma^+ \in S$ .

Si  $\varrho(0) \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma^- = \varrho(-1) \in S$  et  $\sigma^+ = \varrho(0) \in \text{Ex } S$ . Nous obtenons une contradiction avec  $\sigma^- \in S$  si et seulement si  $\sigma^+ \in S$ .

Si  $\varrho(0) \in \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\varrho(0) \neq \varrho(1)$  et  $\varrho(1) \in \text{Cl } \varrho(0)$ . Donc,  $\text{Ex } S$  n'est pas fermé et contredit la condition 1) de la définition 4.15.

Donc, il n'existe pas de solutions  $\varrho$  avec la condition ci-dessus. Alors,  $S$  est un invariant isolé.  $\square$

Nous pouvons encore réduire la deuxième condition. Vérifier tous les simplexes d'un complexe simplicial peut devenir exigeant. Donc, il est inutile de vérifier les simplexes qui sont éloignés de l'invariant. Nous modifions cette vérification globale par une vérification locale à l'invariant.

**Lemme 4.22.** *Soit  $N$  un invariant. Si  $\sigma \in K \setminus \text{Cl } N$ , alors,  $\sigma^+ \notin N$  et  $\sigma^- \notin N$ .*

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in K \setminus \text{Cl } N$ . Si  $\sigma \in \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma = \sigma^+ = \sigma^-$  et  $\sigma \notin N$ . Donc,  $\sigma^+, \sigma^- \notin N$ .

Si  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma^- = \sigma$  et nous obtenons  $\sigma^- \notin N$ . De plus,  $\sigma^+ = \mathcal{V}(\sigma)$  où  $\sigma < \mathcal{V}(\sigma) \notin \text{Cl } N$  car si  $\mathcal{V}(\sigma) \in \text{Cl } N$ , alors,  $\sigma^- = \sigma \in \text{Cl } N$  qui se contredit. Donc,  $\sigma^+ \notin N$ .

Si  $\sigma \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma = \sigma^+$  et  $\mathcal{V}^{-1}(\sigma) < \sigma$ . Nous obtenons  $\sigma^+ \notin N$  et  $\sigma^- < \sigma^+$ . Montrons que si  $N$  est invariant, alors, il n'existe pas de  $\sigma \in K$  tel que  $\sigma^- \in N$  et  $\sigma^+ \notin N$ . Supposons qu'il existe un tel  $\sigma$ . Alors, nous avons  $\text{card}(\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma) \cap N) = 0$ . Donc, il n'existe pas de solution complète passant par  $\sigma$ , mais, ceci contredit l'hypothèse que  $N$  est invariant. Alors, ce cas n'arrive pas quand  $N$  est invariant. Ainsi,  $\sigma^- \notin N$ .

Donc, nous obtenons que  $\sigma \in K \setminus \text{Cl } N$ . Alors,  $\sigma^+ \notin N$  et  $\sigma^- \notin N$ . □

Ainsi, nous pouvons réduire la condition 2) de la proposition 4.21 pour seulement vérifier les simplexes de l'adhérence de  $S$  au lieu de vérifier tout le complexe simplicial. Nous obtenons l'algorithme 6.

---

**Algorithme 6** Vérifie si un ensemble est un invariant isolé

---

**Entrée :** Un ensemble de simplexes  $S$ .

**Sortie :** Retourne vrai si  $S$  est un invariant isolé.

**Si**  $S$  n'est pas un invariant **Alors**

**Retourne** Faux

**Fin Si**

Ex  $S \leftarrow \text{Cl } S \setminus S$

**Si** Ex  $S$  n'est pas fermé **Alors**

**Retourne** Faux

**Fin Si**

**Pour tout**  $\sigma \in \text{Cl } S$  **faire**

**Si**  $(\sigma^+ \in S \text{ et } \sigma^- \notin S) \text{ ou } (\sigma^+ \notin S \text{ et } \sigma^- \in S)$  **Alors**

**Retourne** Faux

**Fin Si**

**Fin Pour**

**Retourne** Vrai

---

**Exemple 4.23.** Vérifions si les invariants dans la Figure 4.1 sont des invariants isolés. Soit  $S_1 = \{[V_2, V_3, V_5], [V_2, V_5], [V_2, V_3], [V_1, V_2, V_3], [V_1, V_2], [V_0, V_1, V_2], [V_0, V_2], [V_2]\}$  un invariant. Nous avons  $\text{Ex } S_1 = \{[V_0], [V_0, V_1], [V_1], [V_1, V_3], [V_3], [V_3, V_5], [V_5]\} = \text{Cl Ex } S_1$ . Alors, la première condition est satisfaite. Calculons  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  de  $[V_0, V_2]$ . Nous avons

$\sigma^+ = [V_0, V_2] \in S_1$  et  $\sigma^- = [V_0] \notin S_1$ . Alors, la deuxième condition n'est pas satisfaite. Donc,  $S_1$  n'est pas un invariant isolé.

Soit  $S_2 = \{[V_2, V_3, V_5], [V_3, V_5], [V_2, V_5], [V_5], [V_3, V_4, V_5], [V_3, V_4], [V_4], [V_4, V_5]\}$  un invariant. Nous avons  $\text{Ex } S_2 = \{[V_2], [V_2, V_3], [V_3]\} = \text{Cl Ex } S_2$ . Calculons  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  des simplexes de  $S_2$  :

$$\sigma_1 = [V_2, V_3, V_5], \sigma_1^+ = [V_2, V_3, V_5] \text{ et } \sigma_1^- = [V_2, V_3, V_5].$$

$$\sigma_2 = [V_2, V_5], \sigma_2^+ = [V_2, V_5] \text{ et } \sigma_2^- = [V_2, V_5].$$

$$\sigma_3 = [V_5], \sigma_3^+ = [V_5] \text{ et } \sigma_3^- = [V_5].$$

$$\sigma_4 = [V_3, V_5], \sigma_4^+ = [V_3, V_4, V_5] \text{ et } \sigma_4^- = [V_3, V_5].$$

$$\sigma_5 = [V_3, V_4, V_5], \sigma_5^+ = [V_3, V_4, V_5] \text{ et } \sigma_5^- = [V_3, V_5].$$

$$\sigma_6 = [V_3, V_4], \sigma_6^+ = [V_3, V_4] \text{ et } \sigma_6^- = [V_3, V_4].$$

$$\sigma_7 = [V_4], \sigma_7^+ = [V_4, V_5] \text{ et } \sigma_7^- = [V_4].$$

$$\sigma_8 = [V_4, V_5], \sigma_8^+ = [V_4, V_5] \text{ et } \sigma_8^- = [V_4].$$

Pour tous les autres simplexes  $\tau \notin S_2$ ,  $\tau^+ \notin S_2$  et  $\tau^- \notin S_2$ . Donc,  $S_2$  est un invariant isolé.

Nous pouvons nous intéresser au plus petit invariant à l'intérieur d'un invariant. Autrement dit, si nous avons un invariant  $N$ , pouvons-nous enlever des simplexes à  $N$  et satisfait encore la définition d'invariant ? Donc, nous pouvons définir un invariant minimal de manière classique.

**Définition 4.24.** *Un invariant  $N$  est minimum, s'il n'existe pas d'invariants  $M$  tels que  $M \neq \emptyset$  et  $M \subsetneq N$ .*

Pareillement au lemme 4.13, nous obtenons un critère similaire des invariants pour les

invariants minimaux. Par contre, il faut ajouter des hypothèses plus fortes pour l'obtenir.

**Lemme 4.25.** *Soit  $N$  un invariant.  $N$  est minimum si et seulement si  $N$  est connexe et pour tout  $\sigma \in N$ ,  $\text{card}(\Pi_V(\sigma) \cap N) = 1$  et  $\text{card}(\Pi_V^{-1}(\sigma) \cap N) = 1$ .*

*Démonstration.* D'abord, montrons que si  $N$  est minimum, alors, pour tout  $\sigma \in N$ , nous avons que  $\text{card}(\Pi_V(\sigma) \cap N) = 1$  et  $\text{card}(\Pi_V^{-1}(\sigma) \cap N) = 1$ . Par la contraposée, supposons qu'il existe un  $\sigma \in N$  tel que  $\text{card}(\Pi_V(\sigma) \cap N) \neq 1$  ou  $\text{card}(\Pi_V^{-1}(\sigma) \cap N) \neq 1$ . D'abord, par le lemme 4.13, nous obtenons que  $\text{card}(\Pi_V(\sigma) \cap N) \neq 0$  et  $\text{card}(\Pi_V^{-1}(\sigma) \cap N) \neq 0$ . Soit  $\sigma \in N$  tel que  $\text{card}(\Pi_V(\sigma) \cap N) > 1$ . S'il existe une solution complète  $\varrho_1$  passant par  $\sigma_1$ , mais ne passant jamais par  $\sigma_2$  ou s'il existe une solution complète  $\varrho_2$  passant par  $\sigma_2$ , mais ne passant par  $\sigma_1$ , alors,  $\text{Im } \varrho_1 \subsetneq N$  et  $\text{Im } \varrho_2 \subsetneq N$ . De plus,  $\text{Im } \varrho_1$  et  $\text{Im } \varrho_2$  sont des invariants. Donc,  $N$  n'est pas un invariant minimal.

Il reste un autre cas plus difficile à vérifier. Soient  $\sigma \in N$  tel que  $\text{card}(\Pi_V^{-1}(\sigma) \cap N) > 1$ . Donc, il existe  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  tel que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2 \in \Pi_V^{-1}(\sigma)$ . S'il y existe une solution complète  $\varrho_1$  passant par  $\sigma_1$  et ensuite  $\sigma_2$ , mais entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , la solution ne passe jamais par  $\sigma$ . Sinon, nous pourrions repasser par  $\sigma_1$  et nous obtenons le cas plus haut. De la même manière que  $\varrho_1$ , nous définissons  $\varrho_2$ , mais, au lieu de passer par  $\sigma_1$  et ensuite  $\sigma_2$ ,  $\varrho_2$  passe par  $\sigma_2$  en premier et ensuite  $\sigma_1$ . Donc, nous avons une solution  $\varrho'_1$  de  $\sigma_1$  à  $\sigma_2$  et une solution  $\varrho'_2$  de  $\sigma_2$  à  $\sigma_1$ . Donc, nous construisons une solution complète  $\varrho_3$  en concaténant, en alternance,  $\varrho'_1$  et  $\varrho'_2$  une infinité de fois. Donc,  $\text{Im } \varrho_3 \subset N$  et  $\sigma \notin \text{Im } \varrho_3$  implique que  $N$  n'est pas minimal.

Il reste à montrer que  $N$  est connexe. Par contradiction, supposons que  $N$  est un invariant minimum et il n'est pas connexe. Donc, il existe deux solutions complètes  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  telles que  $\text{Im } \varrho_1 \cap \text{Im } \varrho_2 = \emptyset$ . Ainsi, nous avons que  $\text{Im } \varrho_1 \subsetneq N$ . Donc,  $N$  n'est pas un invariant minimum et nous obtenons la contradiction.

De l'autre côté, montrons que si  $N$  est connexe et pour tout  $\sigma \in N$ ,  $\text{card}(\Pi_V(\sigma) \cap N) = 1$



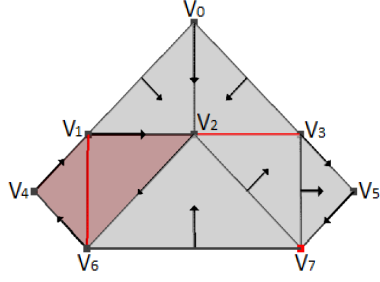


Figure 4.4 – Exemple sur les invariants minimaux.

et  $\text{card}(\Pi_V^{-1}(\sigma) \cap N) = 1$ , alors,  $N$  est minimum. Par construction, comme chaque  $\sigma \in N$  a une image unique et une préimage unique associée à  $\Pi_V$  et  $N$  est connexe, il existe une unique solution complète  $\varrho$  contenue dans  $N$ . Donc,  $\text{Im } \varrho = N$  ce qui entraîne que  $N$  est minimal.

□

Donc, nous avons un critère combinatoire pour vérifier les invariants minimaux. Alors, nous obtenons cet algorithme 7.

---

**Algorithme 7** Vérification d'un invariant minimum

---

**Entrée :** Un ensemble de simplexes  $N$ .

**Sortie :** Vérifie si  $N$  est un invariant minimum.

**Pour tout**  $\sigma \in N$  **faire**

**Si**  $\text{card}(\Pi_V(\sigma) \cap N) \neq 1$  **ou**  $\text{card}(\Pi_V^{-1}(\sigma) \cap N) \neq 1$  **Alors**

**Retourne** Faux

**Fin Si**

**Fin Pour**

**Si**  $N$  n'est pas connexe **Alors**

**Retourne** Faux

**Fin Si**

**Retourne** Vrai

---

**Exemple 4.26.** Vérifions des invariants minimaux de la Figure 4.4. D'abord, nous remarquons qu'un seul point critique est un invariant minimum, comme  $[V_2, V_3]$ . Soit

$N = \{[V_1], [V_1, V_2], [V_2], [V_2, V_6], [V_6], [V_4, V_6], [V_4], [V_1, V_4], [V_1, V_4, V_6], [V_1, V_6], [V_1, V_2, V_6]\}.$   
*Nous avons que  $N$  n'est pas un invariant minimal car  $\text{card}(\Pi_V([V_1, V_4, V_6]) \cap N) = 7.$*   
*Donc, nous décomposons  $N$  en quatre invariants minimaux :  $M_1 = \{[V_1, V_4, V_6]\}, M_2 = \{[V_1, V_2, V_6]\}, M_3 = [V_1, V_6]$  et  $M_4 = \{[V_1], [V_1, V_2], [V_2], [V_2, V_6], [V_6], [V_4, V_6], [V_4], [V_1, V_4]\}.$*   
*Nous appliquons le lemme 4.25 pour vérifier que  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  sont des invariants minimaux.*

Ainsi, dans cette section, nous avons donné une définition des systèmes dynamiques combinatoires. De plus, nous ajoutons d'autres définitions permettant de les étudier comme l'application multivoque  $\Pi_V$ , les solutions, les solutions complètes, les invariants, les invariants isolés et les invariants minimums. Nous avons aussi développé des algorithmes pour vérifier si un ensemble est un invariant, un invariant isolé, un invariant minimal ou pas.

Dans un autre ordre d'idée, nous allons développer une intuition pour mieux trouver des ensembles candidats pour la vérification d'invariant au lieu d'y aller à l'aveuglette. D'abord, nous remarquons qu'un point critique forme un invariant minimal. Mais, il existe aussi d'autres types d'invariants comme les cycles qui respectent aussi les conditions d'isolés et de minimaux. Donc, au prochain chapitre, nous nous concentrerons sur les cycles et la décomposition de Morse.

# CHAPITRE 5

## L'étude des cycles et la décomposition de Morse

Dans ce chapitre, nous étudions les cycles qui sont des cas particuliers des ensembles invariants. En outre, nous définissons la décomposition de Morse qui est une méthode qualitative pour étudier les invariants et leurs relations entre eux. Ceci nous permet de comprendre les tendances du système dynamique combinatoire. Pour finir, nous montrons une construction d'une décomposition de Morse qui fonctionne pour tous les systèmes dynamiques combinatoires avec un complexe simplicial fini. De plus, ce chapitre constitue ma principale contribution originale à ce domaine.

### 5.1 Les cycles

Dans cette section, nous développons le concept des cycles dans les systèmes dynamiques combinatoires. Grâce à cette structure combinatoire, nous obtenons des propriétés intéressantes. De plus, nous montrons quelques résultats qui nous permettront de construire

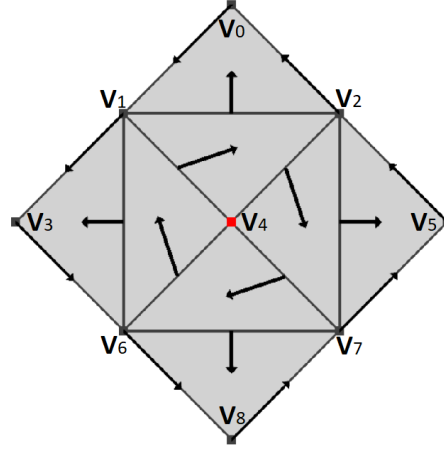


Figure 5.1 – Exemple sur des cycles.

des invariants isolés avec les cycles.

**Définition 5.1.** *Un cycle est une solution  $\varrho : \sigma_0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n$  avec  $n > 0$  tel que  $\sigma_0 = \sigma_n$ .*

*De plus, nous définissons la longueur d'un cycle de la façon suivante. Nous construisons la solution complète  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow K$  avec le cycle  $\varrho$  en le concaténant une infinité de fois avec lui-même. Ainsi, la longueur est le plus petit  $n > 0$  tel que  $\varphi(i) = \varphi(i+n)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .*

La définition de la longueur d'un cycle est un peu complexe. Nous ne pouvons pas prendre nécessairement le plus petit  $n$  tel que  $\varphi(i) = \varphi(i+n)$  pour un seul  $i$  car nous pouvons avoir une auto-intersection dans cette définition de cycle. Donc, nous pourrions avoir  $\sigma_0 = \sigma_i = \sigma_n$  pour un  $i = 1, 2, \dots, n-1$  ou si nous passons plusieurs fois dans le même cycle que nous verrons à la définition 5.8. Ainsi, cette définition de longueur sur les cycles est nécessaire.

**Exemple 5.2.** *Prenons la Figure 5.1 pour vérifier la définition sur les cycles. D'abord, un exemple simple sur les cycles, soit  $\varrho_1 = [v_4] \rightarrow [v_4]$  est un cycle de longueur un car*

$[V_4]$  est un point critique. Soit  $\varrho_2 = [V_1, V_4] \rightarrow [V_1, V_2, V_4] \rightarrow [V_2, V_4] \rightarrow [V_2, V_4, V_7] \rightarrow [V_4, V_7] \rightarrow [V_4, V_6, V_7] \rightarrow [V_4, V_6] \rightarrow [V_1, V_4, V_6] \rightarrow [V_1, V_4]$  est un cycle de longueur huit. Soit  $\varrho_3 = [V_0] \rightarrow [V_0, V_1] \rightarrow [V_1] \rightarrow [V_1, V_3] \rightarrow [V_3] \rightarrow [V_3, V_6] \rightarrow [V_6] \rightarrow [V_6, V_8] \rightarrow [V_8] \rightarrow [V_7, V_8] \rightarrow [V_7] \rightarrow [V_5, V_7] \rightarrow [V_5] \rightarrow [V_2, V_5] \rightarrow [V_2] \rightarrow [V_0, V_2] \rightarrow [V_0]$  est un cycle de longueur 16.

Nous remarquons qu'il y a une structure spécifique sur les cycles  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  et  $\varrho_3$  de l'exemple précédent. D'abord, par le simplexe  $\varrho_1$ , les cycles de longueur un possède un seul point critique. De plus, pour  $\varrho_2$  et  $\varrho_3$ , ils ont une alternance des simplexes de dimension  $d$  et  $d + 1$ . Les deux prochains résultats démontrent ces remarques.

**Proposition 5.3.** *Soit  $\varrho$  un cycle.  $\varrho$  possède un simplexe critique si et seulement si  $\varrho$  est de longueur 1.*

*Démonstration.* Soit un cycle  $\varrho$  de longueur 1. Nous obtenons  $\varrho : \sigma_0 \rightarrow \sigma_1$  tel que  $\sigma_0 = \sigma_1$ . Si  $\sigma_0 \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma_1 \notin \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_0)$ . Si  $\sigma_0 \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma_1 \notin \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_0)$ . Si  $\sigma_0 \in \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma_1 \in \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_0)$ . Donc, la seule possibilité est que  $\sigma_0$  est un simplexe critique.

Soit un cycle  $\varrho$  contenant un simplexe critique. Supposons que la longueur du cycle est  $n$  et strictement plus grand que 1. Soit  $\sigma_i \in \text{Crit } \mathcal{V}$  et  $\sigma_i \in \varrho$ . Nous avons que  $\sigma_{i-1} \notin \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  car  $\sigma_i \notin \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ . Donc,  $\sigma_{i-1} \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  ou  $\sigma_{i-1} \in \text{Crit } \mathcal{V}$ . Si  $\sigma_{i-1} \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  ou  $\sigma_{i-1} \in \text{Crit } \mathcal{V}$  tel que  $\sigma_{i-1} \neq \sigma_i$ , alors, nous obtenons  $\dim \sigma_{i-1} > \dim \sigma_i > \dim \sigma_{i+1}$ . Donc, nous avons une contradiction à l'aide du lemme 4.7 car il n'existe pas de solutions entre  $\sigma_{i+1}$  à  $\sigma_{i+n-1}$  quand nous étendons  $\varrho$  à une solution complète. Si  $\sigma_{i-1} = \sigma_i$ , alors, il existe un  $j$  tel que  $\sigma_{i-j} \neq \sigma_i$  car la longueur est plus grand que 1. Par les mêmes arguments, nous obtenons la même contradiction pour  $\sigma_{i+1}$ . Ainsi, la longueur de  $\varrho$  est 1.  $\square$

**Lemme 5.4.** *Soit un cycle  $\varrho : \sigma_0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n$ , avec  $n > 1$ . La dimension d'un simplexe  $\sigma \in \text{Im } \varrho$  est  $d$ , si  $\sigma \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  et  $d + 1$ , si  $\sigma \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ . De plus, il y a une alternance dans le cycle entre un élément du domaine de  $\mathcal{V}$  et un élément de l'image de  $\mathcal{V}$  de dimension  $d$  et  $d + 1$  respectivement.*

*Démonstration.* Supposons que  $\sigma_0$  est de dimension  $p$ . Par le lemme 4.7, il n'existe pas de solution entre  $\sigma_0$  et  $\sigma_i$  si la  $\dim \sigma_i = p + 2$ . Par le même argument, nous montrons aussi qu'il n'existe pas de solution entre  $\sigma_i$  et  $\sigma_n = \sigma_0$ , si la  $\dim \sigma_i = p - 2$ .

Donc, pour le moment, les simplexes de  $\text{Im } \varrho$  sont de dimensions  $p - 1$ ,  $p$  et  $p + 1$ . Ce qu'il reste à montrer que  $\forall \sigma \in (\text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}) \cap \text{Im } \varrho$  et  $\forall \tau \in (\text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}) \cap \text{Im } \varrho$  implique que  $\dim \sigma + 1 = \dim \tau$ .

Si  $\sigma_i \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma_{i+1} \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$  et nous obtenons  $\dim \sigma_i + 1 = \dim \sigma_{i+1}$ . Si  $\sigma_i \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors, nous avons deux cas. Si  $\sigma_{i+1} \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors,  $\dim \sigma_{i+2} < \dim \sigma_{i+1} < \dim \sigma_i$ . Donc,  $\dim \sigma_i - \dim \sigma_{i+2} \geq 2$  et nous obtenons la contradiction. Donc,  $\dim \sigma_i + 1 = \dim \sigma_{i+1}$ . Si  $\sigma_{i+1} \in \text{Dom } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ , alors, il y a le seul cas possible  $\dim \sigma_i = \dim \sigma_{i+1} + 1$  car si  $\dim \sigma_i > \dim \sigma_{i+1} + 1$ , alors, nous obtenons une contradiction similaire que plus haut à l'aide du lemme 4.7.

Ainsi, nous obtenons l'alternance dans le cycle entre un élément du domaine de  $\mathcal{V}$  et un élément de l'image de  $\mathcal{V}$ . □

À l'aide, du lemme précédent, nous définissons, sans ambiguïté, l'indice d'un cycle.

**Définition 5.5.** *Un indice  $d$  sur un cycle est la dimension des simplexes qui sont éléments du domaine du système dynamique combinatoire. Nous notons un  $d$ -cycle.*

Maintenant que nous comprenons mieux la structure des cycles dans le cas des systèmes dynamiques combinatoires, nous démontrons qu'un cycle est un invariant. De plus, un

cycle respecte aussi les conditions pour être un invariant isolé que nous démontrons dans la prochaine proposition.

**Proposition 5.6.** *Un cycle  $\varrho$  est un invariant isolé.*

*Démonstration.* Soit un  $\varrho : \sigma_0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n$ . Posons  $S = \text{Im } \varrho$ . Nous pouvons construire une solution complète  $\varphi$  en concaténant une infinité de fois  $\varrho$ . Donc  $S$  est un invariant. Donc, il reste à montrer que  $S$  est aussi isolé. Pour le faire, nous allons utiliser la proposition 4.21.

D'abord, vérifions si  $\text{Ex } S$  est fermé dans  $K$ , c'est-à-dire que  $\text{Cl } \text{Ex } S = \text{Ex } S$ . Par le lemme 5.4, un cycle contient seulement des simplexes de dimension  $p$  et  $p + 1$ .

Ainsi,  $\text{Cl } S$  contient les simplexes de dimension 0 jusqu'à  $p + 1$ . Par définition de l'adhérence, nous avons que  $\forall \sigma \in \text{Cl } S$ , si  $\tau < \sigma$  implique que  $\tau \in \text{Cl } S$ . Donc,  $\text{Cl } S \setminus S$  contient des simplexes de dimension 0 jusqu'à  $p$  et chaque simplexe ont toutes leurs faces dans  $\text{Cl } S \setminus S$ . Ainsi, si nous calculons l'adhérence de  $\text{Cl } S \setminus S$ , nous ajoutons aucun simplexe car toutes ses faces sont déjà dans l'ensemble  $\text{Cl } S \setminus S$ . Donc,  $\text{Cl } S \setminus S$  est fermé.

Vérifions si pour tout  $\sigma \in S, \sigma^+ \in S$  si et seulement si  $\sigma^- \in S$ . Plus précisément, nous vérifions les deux cas suivants qui n'arrivent pas. D'abord, nous devons connaître le résultat suivant. Soit  $\sigma \in K$ . Alors,  $\sigma^- \in \text{Dom } \mathcal{V}$  et  $\sigma^+ \in \text{Im } \mathcal{V}$  qui découle de la définition de  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ .

Le premier cas est si  $\sigma^- \in S$ , alors,  $\sigma^+ \notin S$ . Montrons que ce cas n'arrive pas. Supposons qu'il existe un  $\sigma \in K$  respectant la condition ci-dessus. Donc,  $\text{card}(\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma^-) \cap S) = 0$ . Mais,  $S = \text{Im } \varrho$ . Donc,  $\text{card}(\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma^-) \cap S) = 1$  pour tout  $\sigma \in \text{Im } \varrho$ . Donc, nous obtenons la contradiction.

Le deuxième cas est si  $\sigma^- \notin S$ , alors,  $\sigma^+ \in S$ . Montrons que ce cas n'arrive pas. Supposons qu'il existe un  $\sigma \in K$  respectant la condition ci-dessus. Donc,  $\text{card}(\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma^+) \cap S) = 0$ .

Mais,  $S = \text{Im } \varrho$ . Donc,  $\text{card}(\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma^+) \cap S) = 1$  pour tout  $\sigma \in \text{Im } \varrho$ . Donc, nous obtenons la contradiction.

Donc, le cycle est un invariant isolé. □

Ainsi, la recherche des invariants isolés revient à trouver les cycles. Un cycle dans le système dynamique combinatoire est équivalent à un cycle dans un graphe orienté généré par l'application multivoque  $\Pi_{\mathcal{V}}$ . Par contre, il faut supposer que le complexe simplicial  $K$  est fini. Dans le cas infini, trouver tous les cycles dans un graphe orienté est plus difficile. Donc, avec la théorie de graphe, nous avons une méthode systématique pour trouver les invariants isolés. Maintenant, pour optimiser la recherche d'un cycle, nous avons quelques propriétés sur les cycles permettant de réduire les cas à vérifier.

**Proposition 5.7.** *Voici quelques propriétés des cycles :*

1. *La longueur d'un cycle est 1 ou un nombre pair.*
2. *Si  $\varrho : \dots \rightarrow \sigma_{i-1} \rightarrow \sigma_i \rightarrow \sigma_{i+1} \rightarrow \dots$  est un cycle et  $\sigma_{i-1}, \sigma_{i+1} \in \text{Im } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma_i = \sigma_{i-1} \cap \sigma_{i+1}$ .*
3. *Si  $\varrho : \dots \rightarrow \sigma_{i-1} \rightarrow \sigma_i \rightarrow \sigma_{i+1} \rightarrow \dots$  est un cycle et  $\sigma_{i-1}, \sigma_{i+1} \in \text{Dom } \mathcal{V}$ , alors, chaque sommet de  $\sigma_i$  appartient soit à  $\sigma_{i-1}$  ou à  $\sigma_{i+1}$ .*
4. *Soit un cycle qui ne contient pas de simplexe critique. Alors, sa longueur minimale est 6.*

*Démonstration.* 1. S'il y a un simplexe critique dans un cycle, alors la longueur du cycle est 1 par la proposition 5.3. Sinon, pour un cycle de longueur plus que 1, nous avons qu'une alternance entre un simplexe dans le domaine et un simplexe dans l'image de  $\mathcal{V}$  qui ne sont pas critiques. Donc, nous obtenons une longueur paire.

2. D'abord, nous avons  $\sigma_i < \sigma_{i-1}$  et  $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ . Ainsi,  $\sigma_i \subset \sigma_{i+1} \cap \sigma_{i-1}$ .



De plus,  $\sigma_{i-1} \neq \sigma_{i+1}$  car si  $\sigma_{i-1} = \sigma_{i+1}$  et nous avons que  $\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$ . Alors,  $\sigma_i \notin \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_{i+1}) = \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_{i-1})$  et nous obtenons la contradiction. Donc,  $\dim(\sigma_{i-1} \cap \sigma_{i+1}) < \dim \sigma_{i-1} = \dim \sigma_{i+1} = p + 1$  et  $p \leq \dim \sigma_i \leq \dim(\sigma_{i-1} \cap \sigma_{i+1}) < p + 1$ . Ainsi,  $p = \dim(\sigma_{i-1} \cap \sigma_{i+1})$ .  $K$  est un complexe simplicial. Alors, il existe un unique simplexe pour l'intersection entre  $\sigma_{i-1}$  et  $\sigma_{i+1}$ . Donc, nous avons  $\sigma_i = \sigma_{i-1} \cap \sigma_{i+1}$ .

3. Premièrement, nous avons que  $\sigma_{i-1} \neq \sigma_{i+1}$ . Supposons le contraire  $\sigma_{i-1} = \sigma_{i+1}$ . Alors,  $\sigma_{i+1} \in \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_i)$ , mais  $\sigma_{i-1} \notin \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_i)$ . Donc, nous obtenons la contradiction.

Nous avons que  $\sigma_{i-1} \subset \sigma_i$  de dimension  $p$ ,  $\sigma_{i+1} \subset \sigma_i$  de dimension  $p$  et  $\sigma_i$  de dimension  $p + 1$ . Nous savons que  $\sigma_{i+1} \neq \sigma_{i-1}$ . Alors, chacun contient  $p + 1$  sommets et il existe au moins un sommet  $v_1 \in \sigma_{i-1}$ , mais  $v_1 \notin \sigma_{i+1}$ . Par symétrie, il existe aussi  $v_2 \in \sigma_{i+1}$ , mais  $v_2 \notin \sigma_{i-1}$ . Donc, pour obtenir les deux simplexes  $\sigma_{i-1}$  et  $\sigma_{i+1}$ , nous avons besoin d'au moins  $p + 2$  sommets de  $\sigma_i$  qui est de l'ensemble de tous ses sommets.

4. D'abord, nous avons démontré que la longueur d'un cycle est paire. Alors, il reste à vérifier que la longueur 2 et 4 ne forment pas un cycle.

Soit un cycle  $\varrho : \sigma_0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$  de longueur 2 tel que  $\sigma_0 = \sigma_2$ . Si  $\sigma_0 \in \text{Dom } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma_1 \in \text{Im } \mathcal{V}$ . Donc, nous avons que  $\sigma_0 \notin \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_1)$  et  $\sigma_2 \in \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_1)$  qui est contradictoire. Si  $\sigma_0 \in \text{Im } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma_1 \in \text{Dom } \mathcal{V}$ . Donc,  $\sigma_1 \in \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_0)$  et  $\sigma_2 \in \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_1)$ . Donc,  $\sigma_1 \notin \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_2) = \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_0)$  qui est contradictoire. Ainsi, il n'existe pas de cycle de longueur 2.

Soit un cycle  $\varrho : \sigma_0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_3 \rightarrow \sigma_4 \rightarrow \sigma_5$  de longueur 4 tel que  $\sigma_0 = \sigma_4$  et  $\sigma_1 = \sigma_5$ . Si  $\sigma_0 \in \text{Dom } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma_1, \sigma_3 \in \text{Im } \mathcal{V}$  et  $\sigma_2 \in \text{Dom } \mathcal{V}$ . Utilisons la propriété suivante :  $\sigma_{i+1} \cap \sigma_{i-1} = \sigma_i$  où  $\sigma_{i+1}, \sigma_{i-1} \in \text{Im } \mathcal{V}$ . Ainsi,  $\sigma_1 \cap \sigma_3 = \sigma_2$  et  $\sigma_3 \cap \sigma_5 = \sigma_4$ . Mais,  $\sigma_1 = \sigma_5$ . Alors,  $\sigma_2 = \sigma_4$ . Nous obtenons la contradiction car  $\sigma_2 \notin \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_3)$ . Si  $\sigma_0 \in \text{Im } \mathcal{V}$ , alors,  $\sigma_1, \sigma_3 \in \text{Dom } \mathcal{V}$  et  $\sigma_2 \in \text{Im } \mathcal{V}$ . Par la même propriété, nous avons que  $\sigma_0 \cap \sigma_2 = \sigma_1$  et  $\sigma_2 \cap \sigma_4 = \sigma_3$ . Ainsi,  $\sigma_1 = \sigma_3$ , mais cela

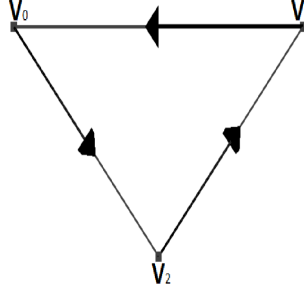


Figure 5.2 – Exemple d'un cycle de longueur 6.

est contradictoire par le même raisonnement que plus haut. Donc, il n'existe pas de cycle de longueur 4.

Il existe des cycles de longueur 6. À la Figure 5.2, nous avons un exemple d'un cycle de longueur 6 avec trois 0-simplexes et trois 1-simplexes.

□

Continuons à étudier la structure des cycles. Par la définition de l'application multivoque  $\Pi_{\mathcal{V}}$  et des cycles, il peut exister des sous-cycles à l'intérieur d'un plus grand cycle. Grâce aux éléments de  $\text{Im } \mathcal{V}$ , nous avons que l'application multivoque nous permet d'avoir plusieurs directions différentes. Ainsi, nous pouvons avoir des auto-intersections.

**Définition 5.8.** *Un cycle  $\varrho$  a une auto-intersection, s'il y existe au moins deux sous-cycles  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  tel que  $\text{Im } \varrho_1 \neq \text{Im } \varrho_2$ ,  $\text{Im } \varrho_1 \cap \text{Im } \varrho_2 \neq \emptyset$ ,  $\text{Im } \varrho_1 \subsetneq \text{Im } \varrho$  et  $\text{Im } \varrho_2 \subsetneq \text{Im } \varrho$ .*

**Exemple 5.9.** *À la Figure 5.3, il y a un cycle contenant une auto-intersection. Ce complexe simplicial est réalisable dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous avons deux 2-simplexes  $[V_0, V_3, V_4]$  et  $[V_1, V_3, V_4]$  qui se chevauchent. Soit  $\varrho : [V_0, V_3] \rightarrow [V_0, V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4, V_6] \rightarrow [V_4, V_6] \rightarrow [V_4, V_6, V_7] \rightarrow [V_4, V_7] \rightarrow [V_4, V_5, V_7] \rightarrow [V_4, V_5] \rightarrow [V_1, V_4, V_5] \rightarrow [V_1, V_4] \rightarrow [V_1, V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4, V_6] \rightarrow [V_3, V_6] \rightarrow [V_2, V_3, V_6] \rightarrow [V_2, V_3] \rightarrow [V_0, V_2, V_3] \rightarrow [V_0, V_3]$  un cycle de longueur 18. Nous avons deux sous-cycles  $\varrho_1 := [V_0, V_3] \rightarrow [V_0, V_3, V_4]$*

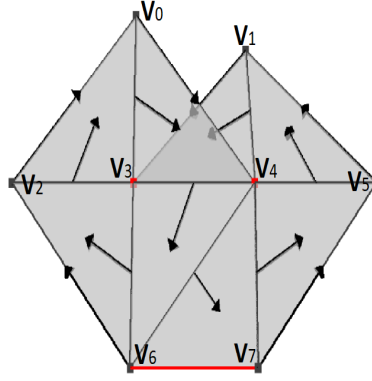


Figure 5.3 – Exemple d’une auto-intersection dans les cycles.

$\rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4, V_6] \rightarrow [V_3, V_6] \rightarrow [V_2, V_3, V_6] \rightarrow [V_2, V_3] \rightarrow [V_0, V_2, V_3] \rightarrow [V_0, V_3]$   
*de longueur 8 et  $\varrho_2 := [V_1, V_4] \rightarrow [V_1, V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4] \rightarrow [V_3, V_4, V_6] \rightarrow [V_4, V_6] \rightarrow$*   
 $[V_4, V_6, V_7] \rightarrow [V_4, V_7] \rightarrow [V_4, V_5, V_7] \rightarrow [V_4, V_5] \rightarrow [V_1, V_4, V_5] \rightarrow [V_1, V_4]$  *de longueur 10.*  
*Nous avons que  $\text{Im } \varrho_1 \neq \text{Im } \varrho_2$ ,  $\text{Im } \varrho_1 \cap \text{Im } \varrho_2 = \{[V_3, V_4], [V_3, V_4, V_6]\}$ ,  $\text{Im } \varrho_1 \subsetneq \text{Im } \varrho$  et*  
 $\text{Im } \varrho_2 \subsetneq \text{Im } \varrho$ . *Donc,  $\varrho$  possède une auto-intersection.*

Comme mentionné auparavant, ce sont les éléments de  $\text{Im } \mathcal{V}$  qui nous permettent d’avoir une auto-intersection car la cardinalité de l’image de  $\Pi_{\mathcal{V}}$  est plus grande ou égale à un. Par contre, pour les éléments du  $\text{Dom } \mathcal{V}$ , la cardinalité de l’image de  $\Pi_{\mathcal{V}}$  est égale à un. Donc, il n’a pas de choix pour avoir une auto-intersection. Mais, leurs préimages des éléments du  $\text{Dom } \mathcal{V}$  permettent d’avoir une auto-intersection dans un cycle. Ainsi, nous pouvons borner le nombre des sous-cycles possible en observant seulement la cardinalité de  $\Pi_{\mathcal{V}}$  des éléments de  $\text{Im } \mathcal{V}$ .

**Lemme 5.10.** *Soit  $\varrho$  un cycle avec une seule auto-intersection. Il existe un  $\sigma_i \in \text{Im } \mathcal{V} \cap \text{Im } \varrho$  qui est le dernier simplexe faisant partie des sous-cycles. Alors, nous pouvons borner le nombre de sous-cycles possibles( $NC$ ) :  $0 < NC \leq \dim \sigma_i$ .*

*Démonstration.* Soit  $d = \dim \sigma_{i+1}$ . Alors, nous pouvons choisir  $d$  sommets parmi  $d + 1$  sommets. Il y a  $\binom{d+1}{d} = \frac{(d+1)!}{d!} = d + 1$  cofaces. Mais,  $\sigma_i \in \text{Im } \mathcal{V} \setminus \text{Crit } \mathcal{V}$ . Alors, la coface

$\sigma_i^- \notin \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_i)$ . Donc, il y a  $d$  cofaces possibles pour construire un sous-cycle. Ainsi, nous obtenons le résultat  $0 < \text{NC} \leq \dim \sigma_{i+1}$ .  $\square$

**Remarque 5.11.** *Une conséquence du lemme précédent est qu'il n'existe pas d'auto-intersections dans les 0-cycles.*

Dans le cas des complexes simpliciaux géométriques, il n'existe pas toujours une possibilité pour avoir une auto-intersection pour un  $d$ -cycle car, par la réalisation géométrique, certains éléments du  $\text{Dom } \mathcal{V}$  ont une cardinalité plus petite ou égale à un pour sa préimage de  $\Pi_{\mathcal{V}}$ .

**Lemme 5.12.** *Soit  $K$  un complexe simplicial géométrique. Un  $d$ -cycle ne peut pas avoir une auto-intersection, si la réalisation géométrique de  $K$  est dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  ou moins.*

*Démonstration.* Soit  $\varrho$  un  $d$ -cycle. Alors,  $\sigma_i \in \text{Im } \mathcal{V} \cap \text{Im } \varrho$  est de dimension  $d+1$ . Donc, pour obtenir un simplexe géométrique comme  $\sigma_i$ , il faut que les  $d+2$  sommets de  $\sigma_i$  soient géométriquement indépendants. Donc, pour la réalisation géométrique de  $\sigma_i$ , nous avons besoin d'être au moins dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Il reste à vérifier qu'il n'a pas d'auto-intersection pour les  $d$ -cycles dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Alors, il existe au maximum deux simplexes  $\tau_1$  et  $\tau_2 \in \text{Im } \mathcal{V}$  où  $\sigma_i < \tau_1$  et  $\sigma_i < \tau_2$ . Posons que  $\tau_1 \in \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma_1)$ . Alors,  $\tau_2$  est le seul élément possible de  $\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma_i)$ . Donc, nous ne pouvons pas avoir d'auto-intersection.  $\square$

Maintenant, nous voulons faire des liens entre les cycles et les invariants minimaux car nous remarquons que si nous enlevons un simplexe d'un cycle qui ne contient pas d'auto-intersection. Alors, nous perdons l'invariance de cet ensemble. Donc, nous percevons une ressemblance entre les cycles et les invariants minimaux qui est présentée dans le prochain corollaire.

**Corollaire 5.13.** *Soit  $N$  un invariant fini.  $N$  est minimal si et seulement si  $N$  est l'image d'un cycle qui n'a pas d'auto-intersection ou  $N$  est un point critique.*

*Démonstration.* Par le côté opposé, si  $N$  est un point critique, alors, il n'existe pas de sous-ensemble de  $N$  non-vide et différent de  $N$ . Si  $N$  est un cycle avec une longueur plus grande que 1, alors, nous avons que  $N$  est connexe et pour chaque  $\sigma \in N$ ,  $\text{card}(\Pi_{\mathcal{V}}(\sigma) \cap N) = 1$  et  $\text{card}(\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma) \cap N) = 1$ . Donc, nous appliquons le lemme 4.25 pour obtenir que  $N$  est un invariant minimum.

Soit  $N$  un invariant minimal. Si  $\text{card}(N) = 1$ , alors, le seul cas possible est que  $\sigma \in \text{Crit } \mathcal{V}$  pour que  $N$  reste un invariant. Si  $\text{card}(N) > 1$ , alors,  $N$  ne contient pas de point critique. Par contradiction, supposons que  $N$  n'est pas un cycle. Donc, pour toutes les solutions complètes, il n'existe pas de  $n$  tel que  $\sigma_i = \sigma_{i+n}$ , mais  $N$  est fini et par le lemme 4.25, nous obtenons la contradiction. S'il y a une auto-intersection, alors, il existe  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  tel que  $\text{Im } \varrho_1 \neq \text{Im } \varrho_2$ . Donc,  $N$  n'est pas un invariant minimum.  $\square$

Maintenant, retournons aux graphes générés par l'application multivoque et nous nous intéressons aux composantes fortement connexes qui ont plus qu'un élément. Ils ressemblent à une union de cycle tel que pour chaque cycle, il existe au moins un autre cycle dont l'intersection est non nulle. Ainsi, nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 5.14.** *Une composante fortement connexe  $F$  avec  $\text{card}(F) > 1$  est un invariant isolé. De plus,  $F$  est de la forme  $F = \cup_{i \in \mathbb{I}} C_{(d,i)}$  où  $C_{(d,i)}$  sont des cycles connexes,  $d$  est l'indice du cycle et  $\mathbb{I}$  est l'ensemble des indices.*

*Démonstration.* Soit  $F$  une composante fortement connexe avec  $\text{card}(F) > 1$ . Montrons que  $F = \cup_{i \in \mathbb{I}} C_{(d,i)}$ . Nous avons que pour tout cycle d'indice  $d_1$  et d'indice  $d_2$  où  $d_1 \neq d_2$  implique que  $C_{d_1} \cap C_{d_2} = \emptyset$ . Tous les simplexes du  $\text{Dom } \mathcal{V} \cap C_{d_1}$  sont de dimension  $d_1 \neq d_2$  et tous les simplexes de  $\text{Im } \mathcal{V} \cap C_{d_1}$  sont de dimension  $d_1 + 1 \neq d_2 + 1$ . Donc, la seule possibilité pour avoir une intersection est  $F = \cup_{i \in \mathbb{I}} C_{(d,i)}$  avec  $d$  comme indice du cycle.

Il reste à montrer que  $F$  est un invariant isolé. D'abord, nous avons que chaque cycle est

un invariant. Alors, l'union d'invariant est encore invariant. Donc,  $F$  est un invariant.

De la même manière que la preuve de la proposition 5.6, nous montrons que  $\text{Ex } F$  est fermé et pour tout  $\sigma \in K$ , nous avons que  $\sigma^- \in F$  si et seulement si  $\sigma^+ \in F$ . Par la proposition 4.21,  $F$  est un invariant isolé.

□

**Remarque 5.15.** *Les cycles avec des auto-intersections dans les systèmes dynamiques combinatoires ont la même structure que les composantes fortement connexes dans le graphe orienté construit à l'aide de l'application multivoque  $\Pi_V$ .*

Donc, à l'aide de l'algorithme de Tarjan présenté plus haut, nous obtenons une méthode pour énumérer les invariants isolés, qui ne sont pas des points critiques, de manière efficace dans un système dynamique combinatoire avec un complexe simplicial fini.

## 5.2 La décomposition de Morse

Dans cette section, nous montrons la décomposition de Morse qui permet de faire une étude qualitative du système dynamique combinatoire. Donc, nous nous intéressons à trouver le début et la fin des solutions complètes. Autrement dit, d'un point de vue de système dynamique, nous cherchons les zones de divergence et de convergence des trajectoires. Dans la décomposition de Morse, ces zones sont les invariants isolés. D'abord, nous présentons les  $\alpha$ -limites et les  $\omega$ -limites dans le contexte combinatoire qui nous permet de déterminer ces zones de convergence et de divergence des trajectoires. Ensuite, nous définissons la décomposition de Morse. Pour finir, nous introduisons une construction qui nous donne cette décomposition pour les systèmes dynamiques combinatoires avec un complexe simplicial fini.

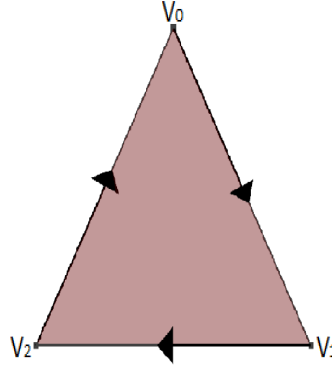


Figure 5.4 – Exemple des ensembles  $\alpha$ -limites et  $\omega$ -limites.

**Définition 5.16.** Soit  $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow K$  une solution complète d'un multi flot combinatoire  $\Pi_V$ . Nous définissons les deux ensembles limites suivants :

— L'ensemble  $\alpha$ -limite de la solution complète  $\varrho$  est :

$$\alpha(\varrho) := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \{\varrho(k) \mid k \leq n\}$$

.

— L'ensemble  $\omega$ -limite de la solution complète  $\varrho$  est :

$$\omega(\varrho) := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \{\varrho(k) \mid k \geq n\}$$

.

Comme dit plus haut, la notion d'ensemble limite vient de la dynamique classique. Par contre, pour le contexte de la dynamique combinatoire, tenant compte du fait que l'intersection est prise sur une famille décroissante d'un nombre fini des ensembles, les ensembles  $\alpha$ -limites et  $\omega$ -limites sont atteints dans un temps entier fini. Par exemple, ces ensembles peuvent être des simplexes critiques répulsifs pour l'ensemble  $\alpha$ -limite, des simplexes critiques attractifs pour l'ensemble  $\omega$ -limite ou des solutions cycliques.

**Exemple 5.17.** À la Figure 5.4, soit  $\varrho := \dots \rightarrow [V_0, V_1, V_2] \rightarrow [V_0, V_1, V_2] \rightarrow [V_0] \rightarrow [V_0, V_1] \rightarrow [V_1] \rightarrow [V_1, V_2] \rightarrow [V_2] \rightarrow [V_0, V_2] \rightarrow [V_0] \rightarrow [V_0, V_1] \rightarrow [V_1] \rightarrow \dots$  une solution

complète. Nous calculons les ensembles limites :

$$\alpha(\varrho) = \{[V_0, V_1, V_2]\} \text{ et}$$

$$\omega(\varrho) = \{[V_0], [V_1], [V_2], [V_0, V_1], [V_1, V_2], [V_0, V_2]\}$$

Ainsi, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour définir la décomposition de Morse. Cette décomposition nous permettra de diviser le complexe simplicial en invariants isolés et de comprendre à l'intérieur de quel invariant isolé proviennent les solutions complètes ou l'avenir des solutions complètes. De plus, nous voulons savoir les liens qu'il y a entre les invariants isolés, c'est-à-dire, qu'il y a une solution passant d'un invariant isolé à un autre.

**Définition 5.18.** Soit  $S$  un ensemble contenant des ensembles invariants isolés. Nous disons qu'une famille  $\mathcal{M} := \{\mathcal{M}_i \mid i \in \mathbb{I}\}$ , indexée par un ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{I}$ , est une décomposition de Morse de  $S$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Les éléments de  $\mathcal{M}$  sont des sous-ensembles invariants isolés de  $S$  mutuellement disjoints.
2. Pour toutes les solutions complètes  $\varrho$  contenues dans  $K$ , il existe  $r, r' \in \mathbb{I}, r \leq r'$ , tels que  $\alpha(\varrho) \subseteq \mathcal{M}_{r'}$  et  $\omega(\varrho) \subseteq \mathcal{M}_r$ .
3. Si pour une solution complète quelconque  $\varrho$  contenue dans  $K$  et  $r \in \mathbb{I}$ , nous obtenons que  $\alpha(\varrho) \cup \omega(\varrho) \subseteq \mathcal{M}_r$ , alors,  $\text{Im } \varrho \subseteq \mathcal{M}_r$ .

Grâce à l'ensemble ordonné  $\mathbb{I}$ , nous pouvons créer le diagramme de Hasse que nous appelons le graphe de Morse. La première condition signifie que nous voulons que les invariants isolés soient disjoints pour comprendre la source et la destination des solutions complètes. La deuxième condition décrit l'interaction des ensembles limites d'une solution complète entre les invariants isolés. La structure de l'ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{I}$  avec l'inclusion représente les liens entre les invariants isolés. Donc, nous pouvons comparer deux



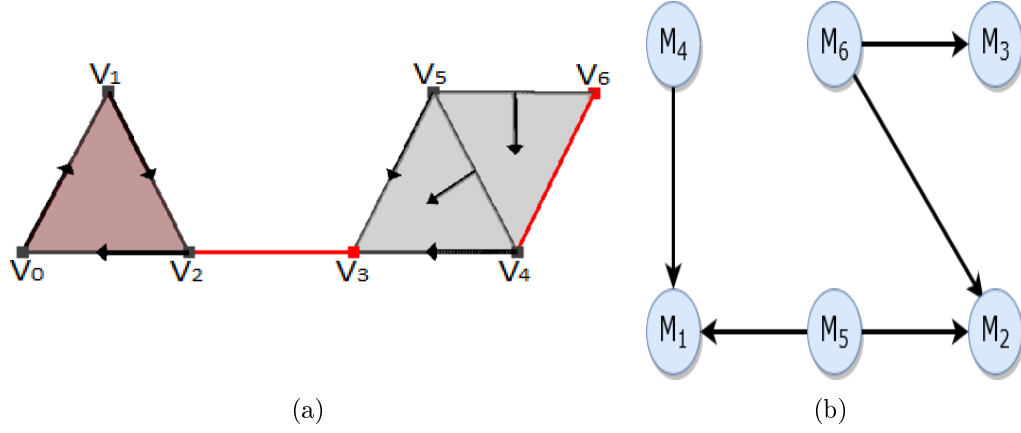


Figure 5.5 – Exemple d’une décomposition de Morse d’un système dynamique combinatoire avec son graphe de Morse.

invariants isolés par une solution complète où la source, contenant  $\alpha$ -limite, est plus grande que la cible, contenant  $\omega$ -limite. La troisième condition implique que si les solutions complètes sortent d’un invariant isolé, alors, ils ne peuvent pas retourner dans le même invariant. Donc, nous voulons que si l’ensemble  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite d’une solution complète sont dans le même invariant isolé, alors, l’image de la solution est complètement contenue dans cet invariant isolé. Cette décomposition permet de comprendre les tendances et les passés des solutions complètes.

**Exemple 5.19.** À la Figure 5.5, nous avons un système dynamique combinatoire avec son graphe de Morse. Construisons une décomposition de Morse. Nous avons les six invariants isolés suivants :  $\mathcal{M}_1 = \{[V_0], [V_1], [V_2], [V_0, V_1], [V_1, V_2], [V_0, V_2]\}$ ,  $\mathcal{M}_2 = \{[V_3]\}$ ,  $\mathcal{M}_3 = \{[V_6]\}$ ,  $\mathcal{M}_4 = \{[V_0, V_1, V_2]\}$ ,  $\mathcal{M}_5 = \{[V_2, V_3]\}$  et  $\mathcal{M}_6 = \{[V_4, V_6]\}$ . De plus, il existe des solutions entre les invariants isolés :  $\mathcal{M}_4 \rightarrow \mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_5 \rightarrow \mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_5 \rightarrow \mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_6 \rightarrow \mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_6 \rightarrow \mathcal{M}_3$ . Donc, nous rajoutons les relations nécessaires à l’ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{I}$ , par exemple  $\mathcal{M}_4 \geq \mathcal{M}_1$ . Donc, nous avons que cette décomposition respecte les conditions de la décomposition de Morse. Ainsi, nous pouvons construire le diagramme de Hasse de  $\mathbb{I}$  qui est présenté à la Figure 5.5(b). De plus, nous remarquons qu’il y a trois

ensembles attractifs (  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  ). D'autre part, les ensembles (  $\mathcal{M}_4$ ,  $\mathcal{M}_5$  et  $\mathcal{M}_6$  ) sont répulsifs.

Nous pouvons aussi trouver une autre décomposition de Morse pour le même système dynamique. Soient les trois invariants isolés suivants :  $\mathcal{M}_1 = \{[V_0], [V_1], [V_2], [V_0, V_1], [V_0, V_2], [V_1, V_2], [V_1, V_2, V_3]\}$ ,  $\mathcal{M}_2 = \{[V_3], [V_4], [V_6], [V_3, V_4], [V_4, V_6]\}$  et  $\mathcal{M}_3 = \{[V_2, V_3]\}$ . Nous avons des solutions entre les invariants isolés  $\mathcal{M}_3 \rightarrow \mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_3 \rightarrow \mathcal{M}_2$  qui nous donnent l'ensemble partiellement ordonné. Nous remarquons qu'un système dynamique combinatoire n'a pas une décomposition de Morse unique. Par contre, certaines décompositions de Morse décrivent, en détail, la trajectoire des solutions du système. Donc, nous nous intéressons à trouver la décomposition de Morse la plus fine. Dans cet exemple, la deuxième décomposition de Morse est moins fine que la première.

Maintenant, nous présentons une construction permettant d'avoir une décomposition de Morse à tout coup pour un complexe simplicial fini. Nous utilisons le graphe associé à  $\Pi_{\mathcal{V}}$  pour trouver les composantes fortement connexes en utilisant l'algorithme de Tarjan, ce qui nous permet d'avoir les invariants isolés par la proposition 5.14. De plus, nous calculons la fermeture transitive d'un graphe pour vérifier s'il existe un chemin entre deux sommets donnés.

Pour la décomposition de Morse, de la même manière que précédemment, soit  $Cf_i$  la  $i$ ème composante fortement connexe avec plus qu'un élément et  $c_i$  le  $i$ ème simplexe critique. Nous posons  $S = \{Cf_1, Cf_2, \dots, Cf_n, c_1, c_2, \dots, c_m\}$  pour l'ensemble des invariants isolés. Pour l'ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{I}$ , nous ajoutons les relations suivantes. Soit  $S_i$  et  $S_j \in S$  et  $M$  la matrice de la fermeture transitive, s'il existe un  $\sigma \in S_i$  et  $\tau \in S_j$  tel que  $M_{i(\sigma)i(\tau)} \neq 0$ , alors, nous ajoutons la relation  $S_i \geq S_j$  à  $\mathbb{I}$ . C'est-à-dire, nous ajoutons une relation à  $\mathbb{I}$  s'il existe au moins une solution entre  $S_i$  et  $S_j$ . Ainsi, nous obtenons le prochain théorème.

**Théorème 5.20.** *Soit  $K$  un complexe simplicial fini. Soit la construction ci-dessus de  $S$  et  $\mathbb{I}$ .  $M := (S, \mathbb{I})$  est une décomposition de Morse.*

*Démonstration.* D'abord, pour la première condition de la décomposition de Morse, nous avons que pour tous les invariants isolés composés par un seul simplexe critique forment un cycle de longueur 1. Alors,  $[S_i]$  est une composante fortement connexe contenant un seul élément. Donc, comme les composantes fortement connexes forment une relation d'équivalence, tous les éléments de  $S$  sont disjoints. Alors, la première condition de la décomposition de Morse est respectée.

Montrons que, pour toutes les solutions complètes  $\varrho$  contenues dans  $K$ , il existe  $r, r' \in \mathbb{I}$ ,  $r \leq r'$  tel que  $\alpha(\varrho) \subseteq \mathcal{M}_{r'}$  et  $\omega(\varrho) \subseteq \mathcal{M}_r$ . Par la construction de l'ensemble partiellement ordonné, nous avons ajouté toutes les relations entre deux invariants isolés s'il y existe une solution entre les deux invariants isolés. Donc, soit une solution  $\varrho$  partant de  $\mathcal{M}_{r'}$  allant à  $\mathcal{M}_r$ . Nous étendons la solution  $\varrho$  en une solution complète pour le temps  $t$  à  $-\infty$  en ajoutant des éléments de  $\mathcal{M}_{r'}$  et pour le temps  $t$  à  $+\infty$  en ajoutant des éléments de  $\mathcal{M}_r$ . Comme les ensembles  $\mathcal{M}_r$  et  $\mathcal{M}_{r'}$  sont finis. Alors,  $\alpha(\varrho) \neq \emptyset$  et  $\omega(\varrho) \neq \emptyset$ . Donc, nous avons que  $r' \geq r$  pour la solution complète  $\varrho$ . De cette manière, nous pouvons reconstruire toutes les solutions complètes et ils satisfont à la deuxième condition.

Ensuite, pour la troisième condition d'une décomposition de Morse nous voulons montrer qu'il n'existe pas de solution complète  $\varrho$  telle que  $\alpha(\varrho) \cup \omega(\varrho) \subset \mathcal{M}_r$  et  $\text{Im } \varrho \not\subset \mathcal{M}_r$ . Nous avons deux cas à vérifier. Soit  $\mathcal{M}_r$  un invariant isolé composé d'un seul simplexe critique  $\sigma$ . Il n'existe pas de solution  $\varrho$  telle que  $\varrho(i) = \sigma$ ,  $\varrho(i+1) \neq \sigma$  et  $\varrho(j) = \sigma$  avec  $i < j$  et  $i, j \in \mathbb{Z}$  car, par la proposition 5.3, nous avons que les cycles possibles avec un simplexe critique sont tous de longueur un. Soit  $\mathcal{M}_r$  un invariant isolé composé d'une composante fortement connexe. Donc, par contradiction, supposons qu'il existe une solution complète  $\varrho$  telle que  $\alpha(\varrho) \cup \omega(\varrho) \subseteq \mathcal{M}_r$  et  $\text{Im } \varrho \not\subset S$ . Donc, nous définissons

une solution  $\varrho'$  une restriction de  $\varrho$  telle que  $\text{Im } \varrho' = \text{Im } \varrho \setminus (\alpha(\varrho) \cup \omega(\varrho))$ . Donc, nous avons une solution partant de  $\mathcal{M}_r$  et qui retourne dans  $\mathcal{M}_r$ . Alors, par la définition de la composante fortement connexe,  $\varrho'$  est contenu dans  $\mathcal{M}_r$  qui contredit le fait  $\text{Im } \varrho \not\subset S$ . Donc, il n'existe pas de solution complète  $\varrho$  telle que  $\alpha(\varrho) \cup \omega(\varrho) \subset S$  et  $\text{Im } \varrho \not\subset \mathcal{M}_r$ .

Donc, cette construction d'invariant isolé par les composantes fortement connexes et les simplexes critiques et l'ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{I}$  est une décomposition de Morse.

□

Ainsi, par le théorème précédent, nous pouvons construire l'algorithme 8.

---

**Algorithme 8** Décomposition de Morse par les composantes fortement connexes et les simplexes critiques

---

**Entrée :** Un complexe simplicial  $K$  avec un champ vectoriel combinatoire discret  $\mathcal{V}$ .

**Sortie :** Une liste d'invariants isolés  $\mathcal{M}$  et un ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{I}$ .

Un graphe  $\mathcal{G} := \text{calcul du graphe de l'application multivoque } \Pi_{\mathcal{V}}$ .

une liste CFC = `decomposeComposanteFortementConnexe`( $\mathcal{G}$ ).

**Pour tout**  $c \in \text{CFC}$  **faire**

**Si**  $\text{card}(c) > 1$  **Alors**

        Ajouter  $c$  à  $\mathcal{M}$ .

**Fin Si**

**Fin Pour**

**Pour tout**  $\sigma \in \text{Crit } \mathcal{V}$  **faire**

    Ajouter  $\sigma$  à  $\mathcal{M}$ .

**Fin Pour**

Calculons  $\mathbb{I}$  :

Soit  $i : K \rightarrow \mathbb{N}$  un indexage des simplexes  $\sigma$ .

Soit une matrice  $tc = \text{calculeMatFermetureTransistive}(\mathcal{G})$ .

**Pour tout**  $S_1 \in \mathcal{M}$  et  $S_2 \in \mathcal{M}$  **faire**

**Si** Il existe  $\sigma \in S_1$  et  $\tau \in S_2$  tel que  $tc_{i(\sigma)i(\tau)} \geq 1$  **Alors**

        Ajouter la relation  $S_1 \rightarrow S_2$  à  $\mathbb{I}$ .

**Fin Si**

**Fin Pour**

**Retourne**  $(\mathcal{M}, \mathbb{I})$

---

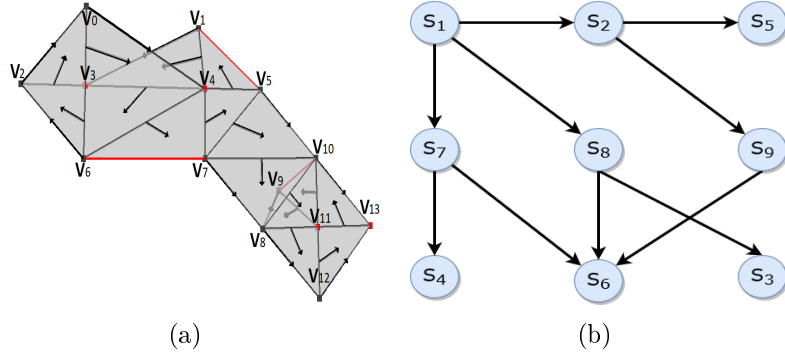


Figure 5.6 – Exemple d’une décomposition de Morse par les composantes fortement connexes avec son graphe de Morse.

**Exemple 5.21.** Appliquons cette construction de décomposition de Morse par composantes fortement connexes et des simplexes critiques à la Figure 5.6(a). D’abord, ce complexe simplicial est dans  $\mathbb{R}^3$  et il y a trois simplexes  $[V_1, V_3, V_4]$ ,  $[V_8, V_9, V_{11}]$  et  $[V_9, V_{10}, V_{11}]$  qui sont situés en dessous du complexe simplicial. Nous générons le graphe de l’application multivoque et nous appliquons l’algorithme de Tarjan. Nous ne dessinons pas ce graphe car il contient 59 nœuds et 129 arêtes. Nous obtenons deux composantes fortement connexes :  $S_1 := \{[V_0, V_3], [V_0, V_3, V_4], [V_3, V_4], [V_3, V_4, V_6], [V_3, V_6], [V_2, V_3, V_6], [V_2, V_3], [V_0, V_2, V_3], [V_4, V_6], [V_4, V_6, V_7], [V_4, V_7], [V_4, V_5, V_7], [V_4, V_5], [V_1, V_4, V_5], [V_1, V_4], [V_1, V_3, V_4]\}$  il a une auto-intersection avec deux sous-cycles et  $S_2 = \{[V_9, V_{11}], [V_8, V_9, V_{11}], [V_8, V_{11}], [V_8, V_{11}, V_{12}], [V_{11}, V_{12}], [V_{11}, V_{12}, V_{13}], [V_{11}, V_{13}], [V_{10}, V_{11}, V_{13}], [V_{10}, V_{11}], [V_9, V_{10}, V_{11}]\}$ . De plus, il y a sept simplexes critiques :  $S_3 = \{[V_3]\}$ ,  $S_4 = \{[V_4]\}$ ,  $S_5 = \{[V_{11}]\}$ ,  $S_6 = \{[V_{13}]\}$ ,  $S_7 = \{[V_1, V_5]\}$ ,  $S_8 = \{[V_6, V_7]\}$  et  $S_9 = \{[V_9, V_{10}]\}$ . Nous calculons la matrice transitive du graphe pour trouver l’existence des solutions entre deux invariants isolés. Donc, nous calculons l’ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{I}$  qui a les relations suivantes :  $S_1 \geq S_i$  pour  $i = 2, 3, \dots, 9$ ,  $S_2 \geq S_5$ ,  $S_2 \geq S_6$ ,  $S_2 \geq S_9$ ,  $S_7 \geq S_4$ ,  $S_7 \geq S_6$ ,  $S_8 \geq S_3$ ,  $S_8 \geq S_6$  et  $S_9 \geq S_6$ . Donc, nous obtenons le graphe de Morse 5.6(b).

Pour finir, dans les deux derniers chapitres, nous avons introduit le concept des systèmes

combinatoires. Pour ce faire, nous avons généralisé l'idée de la théorie de Morse discrète de Forman. Nous utilisons les complexes simpliciaux et nous apparions les objets de dimension  $d$  à lui-même s'il y est fixe ou de dimension  $d + 1$  qui ont une relation de coface. Ensuite, nous définissons l'application multivoque  $\Pi_V$  et les solutions qui sont une suite de simplexes permettant d'étudier le dynamisme du système. Par la suite, nous nous intéressons aux solutions complètes avec leur secteur de convergence quand le temps tend vers l'infini ou le secteur de divergence quand le temps tend à moins l'infini. Nous avons appelé ces zones les invariants et en ajoutant certaines conditions nous obtenons les invariants isolés et les invariants minimums. Puis, nous avons remarqué que trouver des invariants est difficile. Alors, nous avons approfondi la structure d'un type d'invariant : les cycles. Ensuite, nous avons défini les ensembles  $\alpha$ -limites et  $\omega$ -limites permettant d'identifier aux solutions complètes d'où elles proviennent et d'où elles se rendent. De plus, ceci nous a permis de définir une décomposition de Morse qui aide à mieux comprendre les liens entre les invariants isolés. Pour finir, nous avons développé un algorithme qui calcule une décomposition de Morse à l'aide des composantes fortement connexes et les simplexes critiques. Cette structure de systèmes dynamiques combinatoires est une nouvelle façon de raisonner sur les systèmes dynamiques dans les mathématiques appliquées.

# CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons vu une méthode pour traiter les systèmes dynamiques combinatoires. Pour ce faire, nous utilisons les complexes simpliciaux pour construire un espace combinatoire. Ensuite, nous nous inspirons de la théorie de Morse discrète de Robin Forman. Il a construit un champ vectoriel gradient combinatoire en associant un simplexe de dimension  $n$  comme source et un simplexe de dimension  $n+1$  comme cible du vecteur ou un simplexe à lui-même pour obtenir un simplexe critique. De plus, il a défini une suite de simplexes, appelé un  $v$ -chemin, qui permet de construire des trajectoires dans le complexe simplicial avec les vecteurs combinatoires. Par la suite, nous avons généralisé les champs vectoriels gradients combinatoires pour obtenir les systèmes dynamiques combinatoires. Nous gardons la même idée pour construire les vecteurs combinatoires, mais nous avons modifié la notation des simplexes critiques pour des simplexes fixes et les  $v$ -chemins par les solutions avec une application multivoque  $\Pi_V$  pour mieux refléter le concept des systèmes dynamiques. Ensuite, nous avons discrétisé les invariants et les invariants isolés. Par la suite, nous avons étudié la structure des cycles et nous avons démontré qu'ils forment des invariants isolés. En outre, nous nous intéressons aussi aux liens entre les invariants isolés. Donc, nous avons défini la décomposition de Morse qui relie deux invariants isolés s'il y existe une solution complète partant d'un invariant à l'autre. De plus, nous avons montré quelques algorithmes pour vérifier si un ensemble est un invariant, faire des calculs de la préimage de  $\Pi_V$  et une méthode pour faire une

décomposition de Morse.

Il y a plusieurs autres avenues que nous n'avons pas explorées. D'abord, nous pouvons utiliser d'autres types de complexes comme le complexe cubique et le complexe cellulaire. Ensuite, nous aurions pu enlever quelques conditions sur les champs vectoriels combinatoires. Si nous permettons qu'un simplexe soit la source de plusieurs simplexes ou la cible de plusieurs simplexes, alors, nous obtenons les champs multi vectoriels [Mro17]. Une autre possibilité dans la théorie de Morse discrète est d'utiliser des fonctions de Morse discrète multidimensionnelles  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^N$  avec  $N > 1$ . Donc, nous ne pouvons pas reprendre la même définition 3.1 car nous utilisons des inégalités sur les fonctions de Morse discrète. Alors, nous pouvons utiliser la définition comme dans cet article [AKLM]. De plus, avec les invariants isolés de la décomposition de Morse, nous pouvons calculer leur indice de Conley [KMM04] qui permet de comprendre davantage le type d'invariant et de faire un lien entre les systèmes dynamiques classiques et combinatoires. Nous devons définir une paire d'ensembles et en calculer l'homologie relative qui nous donne leurs indices de Conley.

En revanche, un algorithme intéressant serait de construire un système dynamique combinatoire à partir des données. Dans le cas classique, il existe des méthodes d'apprentissage automatique pour trouver la fonction  $\dot{f}(x) = x(t)$ . Par exemple, il existe la méthode SINDy [BPN15] qui utilise une régression non linéaire creuse avec une bibliothèque des fonctions possibles. Ainsi, l'algorithme trouve les fonctions et lui attribue un coefficient, ce qui permet de trouver  $\dot{f}$ . Par contre, dans le cas combinatoire, nous avons des algorithmes pour fabriquer un champ vectoriel gradient combinatoire à partir des valeurs sur les sommets et aussi de construire un complexe simplicial. Mais, il n'existe pas d'algorithme qui le fait pour un champ vectoriel non gradient combinatoire.

Donc, une piste intéressante est d'utiliser l'apprentissage automatique sur des données, mais, au lieu de construire  $\dot{f}(x)$ , nous pourrions construire un complexe simplicial avec un



champ vectoriel discret qui nous fournit une application multivoque  $\Pi_V$ . Une autre idée est d'apprendre sur l'application multivoque qui est différente de  $\Pi_V$  de la définition 4.3. Par contre, l'application multivoque n'est pas une fonction que nous pouvons exprimer par des polynômes et la transformée de Fourier. Donc, il faudrait créer une nouvelle méthode pour pouvoir appliquer l'apprentissage automatique.

En résumé, nous avons appliqué la topologie computationnelle aux systèmes dynamiques à partir de la théorie de Morse discrète. Ainsi, les systèmes dynamiques combinatoires sont utiles pour expliquer plusieurs phénomènes combinatoires, ou même une approximation d'un phénomène continu, avec la puissance de l'informatique augmentant jour après jour qui nous permet de faire des prédictions de plus en plus précises.

# Bibliographie

- [AKLM] M. Allili, T. Kaczynski, C. Landi, and F. Masoni. Acyclic Partial Matchings for Multidimensional Persistence : Algorithm and Combinatorial Interpretation. *version publiée dans J Math Imaging Vis(2018), DOI 10.1007/s10851-018-0843-8*.
- [BCST17] J. Boissonnat, Karthik C. S., and S. Tavenas. Building Efficient and Compact Data Structures for Simplicial Complexes. *Algorithmica*, 79 :530–567, 2017.
- [BKMW] B. Batko, T. Kaczynski, M. Mrozek, and T. Wanner. Linking Combinatorial and Classical Dynamics : Conley Index and Morse Decompositions. *à paraître dans Foundations of Computational Mathematics*.
- [BM14] J. Boissonnat and C. Maria. The Simplex Tree : An Efficient Data Structure for General Simplicial Complexes. *Algorithmica*, 70(3) :406–427, 2014.
- [Bor48] K. Borsuk. On the Imbedding of Systems of Compacta in Simplicial Complexes. *Fundamenta Mathematicae*, 35(1) :217–234, 1948.
- [BPN15] S. L. Brunton, J. L. Proctor, and K. J. Nathan. Discovering Governing Equations from Data : Sparse Identification of Nonlinear Dynamical Systems. *arXiv :1509.03580v1*, page 26, 2015.
- [EH10] H. Edelsbrunner and J. L. Harer. *Computational Topology An Introduction*. American Mathematical Society, 2010.

- [For98] R. Forman. Morse Theory for Cell Complexes. *Advances in Mathematics*, 134(AI971650) :90–145, 1998.
- [For02] R. Forman. A User’s Guide to Discrete Morse Theory. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 48(B48c) :35, 2002.
- [Ghr14] R. Ghrist. *Elementary Applied Topology*. Createspace, ed. 1.0 edition, 2014.
- [KKM05] H. King, K. Knudson, and N. Mramor. Generating Discrete Morse Functions from Point Data. *Experimental Mathematics*, 14(4) :435–444, 2005.
- [KMM04] T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek. *Computational Homology*. Springer, 2004.
- [KMW16] T. Kaczynski, M. Mrozek, and T. Wanner. Towards a Formal Tie Between Combinatorial and Classical Vector Field Dynamics. *Journal of Computational Dynamics*, 3(1) :17–50, 2016.
- [Mar14] C. Maria. *Algorithms and data structures in computational topology*. HAL, Universit. Nice Sophia Antipolis, 2014.
- [Mat02] Y. Matsumoto. *An Introduction to Morse Theory*. American Mathematical Society, 2002.
- [Mro17] M. Mrozek. Conley-Morse-Forman Theory for Combinatorial Multivector Fields on Lefschetz Complexes. *Foundations of Computational Mathematics*, pages 1585–1633, 2017.
- [MS05] P. Mehta and S. Sahni. *Handbook of Data Structures and Applications*. Chapman and Hall/CRC, 2005.
- [Mun84] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, Cambridge, 1984.
- [RJWS10] V. Robins, P. John Wood, and A. P. Sheppard. Theory and Algorithms for Constructing Discrete Morse Complexes from Grayscale Digital Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 33(8) :14, 2010.

- [Ski08] S. S. Skiena. *The Algorithm Design Manual*. Springer, London, 2008.
- [Tar72] R. Tarjan. Depth-First Search and Linear Graph Algorithms. *SIAM*, pages 146–160, 1972.